Leçon 426. Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes, ...

Courbes paramétrées

Soit $\mathcal{C}$ une courbe dans $\mathbb{R}^2$, d'équation paramétrique

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) , \\ y &= \psi(t) , \end{aligned} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 ,$$

où $\varphi, \psi : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ sont continûment dérivables. Alors la longueur de $\mathcal{C}$ est donnée par

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \, \mathrm{d}t .$$

De plus, si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée, alors l'aire (algébrique) délimitée par $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\psi'(t) \, \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t) \, \mathrm{d}t .$$

Cas particulier : coordonnées polaires

Supposons qu'il existe une fonction continûment dérivable $r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} x &= r(\theta)\cos(\theta) , \\ y &= r(\theta)\sin(\theta) , \end{aligned} \qquad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 .$$

Alors les expressions pour la longueur et l'aire deviennent

$$\begin{aligned} L &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} \, \mathrm{d}\theta , \\ A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta . \end{aligned}$$

Exercice 1 (Longueur et aire de la cardioïde)**.**
Soit $a > 0$. Soit $\mathcal{C}_a$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique

$$\begin{aligned} x(t) &= 2a(1 - \cos t)\cos t , \\ y(t) &= 2a(1 - \cos t)\sin t , \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t < 2\pi .$$

1. Donner l'équation de la courbe $\mathcal{C}_a$ en coordonnées polaires.
2. Calculer la longueur de $\mathcal{C}_a$.
3. Calculer l'aire délimitée par $\mathcal{C}_a$.

On rappelle l'identité trigonométrique $1 - \cos t = 2\sin^2(\frac{t}{2})$.

Exercice 2 (Brachistochrone)**.**
Soit $g > 0$ et soit $\mathcal{C}_g$ la portion de cycloïde d'équation paramétrique

$$\begin{aligned} x(t) &= g(t - \sin t)\ , \\ y(t) &= g(\cos t - 1)\ , \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi\ .$$

1. Soit $T \in]0, \pi]$. Calculer la longueur $L(T)$ de la portion de courbe obtenue lorsque $t \in [0, T]$.
2. Soit $v(t) = L'(t)$. Vérifier que $v(t)$ satisfait la relation de conservation d'énergie

   $$\frac{1}{2} v(t)^2 + g y(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, \pi]$$

   d'un point matériel soumis à la pesanteur et parcourant la courbe $\mathcal{C}_g$. Que valent la distance parcourue et le temps de parcours pour atteindre le point $(\pi g, -2g)$?
3. Soit $a > 0$. On considère le segment de droite d'équation paramétrique

   $$\begin{aligned} x(t) &= a t^2\ , \\ y(t) &= -\frac{2a}{\pi} t^2\ , \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t < T\ .$$

   Trouver a en fonction de g pour que l'équation de conservation de l'énergie soit satisfaite. Trouver la valeur de T pour que $(x(T), y(T)) = (\pi g, -2g)$ et la distance parcourue jusqu'au temps T. Comparer avec le cas de la cycloïde.

Intégrales multiples

Soient $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels, et $f : [a, b] \to [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Dans sa version la plus simple, le théorème de Fubini affirme que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\ .$$

Cette valeur est par définition l'intégrale (double) de f sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

Ce théorème se généralise en particulier

- aux intégrales doubles d'une fonction continue positive dans le cas où a ou c vaut $-\infty$, ou b ou d vaut $+\infty$, sous réserve d'existence des intégrales généralisées;
- aux ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$, par approximation de ces ouverts par une réunion de rectangles;
- aux intégrales multiples dans $\mathbb{R}^n$.

Changement de variables

Soient D et E deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$. Soit $g = (g_1, g_2)$ une bijection de E dans D, telle que g_1 et g_2 soient continûment dérivables, et telle que les composantes de la réciproque g^{-1} soient également continûment dérivables. On dit que g est un difféomorphisme de E dans D. Le Jacobien de g est défini par

$$\frac{\mathrm{D}(g_1, g_2)}{\mathrm{D}(u, v)}(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix} (u, v) \right| .$$

Dans ce cas, on a pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_E (f \circ g)(u, v) \frac{\mathrm{D}(g_1, g_2)}{\mathrm{D}(u, v)}(u, v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v .$$

Exercice 3. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 < y < x\}$. Calculer

$$\iint_D x \sin y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y .$$

Exercice 4. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < y < 4x, 1 < xy < 2\}$. Calculer

$$\iint_D x^2 y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y .$$

Exercice 5. Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 0, x + y + z < 2, x^2 + y^2 < 1\}$. Calculer

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z .$$

Exercice 6 (Algorithme de Box–Müller)**.**
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Quelle est la densité du couple (U, V) ?
2. Soit $g :]0, 1[^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

   $$g(u, v) = \left(\sqrt{-2\ln(u)} \sin(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)} \cos(2\pi v)\right) .$$

   Montrer que g est un difféomorphisme et calculer son Jacobien.
3. Soit $(X, Y) = g(U, V)$. Donner une expression sous forme d'intégrale pour

   $$\mathbb{P}\big\{(X, Y) \in B\big\}$$

   pour tout ensemble ouvert borné B de $\mathbb{R}^2$. En déduire la densité du couple (X, Y). Quelle est la loi de ce couple ?