Indépendance

Rappels de théorie

Evénements indépendants

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ des événements. On dit que ces événements sont indépendants si
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$
pour tout choix de $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$.

- On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants si
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$
pour tout choix de $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$.

- L'indépendance implique l'indépendance deux à deux.

- Si $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ sont deux espaces probabilisés, on peut définir leur espace produit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la façon suivante.
  - On pose $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.
  - La tribu $\mathcal{F}$ est la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ engendrée par tous les éléments $B_1 \times B_2$ avec $B_1 \in \mathcal{F}_1$ et $B_2 \in \mathcal{F}_2$.
  - On définit $\mathbb{P}(B_1 \times B_2) = \mathbb{P}_1(B_1)\mathbb{P}_2(B_2)$ et on étend par additivité à $\mathcal{F}$ tout entier.

  Alors les événements $B_1 \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times B_2$ sont indépendants.

  Cette construction se généralise au produit de n espaces probabilisés.

Variables aléatoires indépendantes

- Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit qu'elles sont indépendantes si les événements $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ sont indépendants pour tout choix de boréliens $B_1, \dots B_n \subset \mathbb{R}$.

- Si Ω est un ensemble dénombrable et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si
$$\mathbb{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \dots \mathbb{P}\{X_n = x_n\}$$
pour tout choix de $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$.

- Si $X_1, \dots, X_n$ admettent une densité conjointe f sur $\mathbb{R}^n$, alors elles sont indépendantes si et seulement si
$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$
où $f_1, \dots, f_n$ sont des densités sur $\mathbb{R}$, appelées densités marginales. Ce sont les densités des X_i, et elles sont nécessairement de la forme
$$f_i(x_i) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \dots dx_n \,.$$

- Si $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes et intégrables, alors $X_1 \dots X_n$ est intégrable et

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_n) .$$

Lemme de Borel–Cantelli

On se donne une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Alors l'événement "$A_n$ est réalisé infiniment souvent" est noté

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{m \geqslant n} A_n$$

On a

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_{n \to \infty} A_n &\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ \omega \in \bigcup_{m \geqslant n} A_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ \exists m \geqslant n \text{ tel que } \omega \in A_m \text{ et } A_m \neq \emptyset \end{aligned}$$

Lemme 1 (Borel–Cantelli)**.**

1. Si $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$.
2. Si les A_n sont indépendants et $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$.

Exercices

Exercice 1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. Montrer que les événements $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \{1, 3\}$ sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas indépendants.

Exercice 2. On lance deux fois un dé équilibré, et on considère les événements

- $A =$ "le premier résultat est pair";
- $B =$ "le second résultat est pair";
- $C =$ "la somme des résultats est paire".

Ces événements sont-ils indépendants deux à deux ? Sont-ils indépendants ?

Exercice 3. On considère un tournoi impliquant n joueurs ($n \geqslant 3$). Chaque joueur affronte tous les autres joueurs. Chaque partie a toujours un gagnant et un perdant.

1. Combien de parties comporte le tournoi ? Appelons issue la liste donnant le gagnant de chaque partie. Combien d'issues différentes le tournoi peut-il avoir ?

2. Construire un espace probabilisé avec la propriété suivante. Toutes les parties sont indépendantes, et pour chaque partie, chacun des joueurs a une probabilité de $1/2$ de gagner.

   On pourra éventuellement commencer avec le cas $n = 3$.

3. Montrer que deux événements n'impliquant pas de partie commune sont indépendants.

4. Nous dirons que l'issue du tournoi est 2-indécise si pour chaque paire de joueurs, il existe un troisième joueur ayant battu chacun de ces deux joueurs.

(a) On fixe trois joueurs. Calculer la probabilité que le troisième joueur ne batte pas à la fois les deux premiers.

(b) On fixe deux joueurs. Calculer la probabilité qu'aucun des $n-2$ autres joueurs ne batte à la fois ces deux joueurs.

(c) En déduire une majoration de la probabilité qu'un tournoi ne soit pas 2-indécis.

(d) Montrer qu'il existe des tournois 2-indécis si le nombre n de joueurs est assez grand.

5. Pour $k \geqslant 3$ tel que $k < n$, nous dirons que l'issue du tournoi est k-indécise si pour chaque k-uplet de joueurs, il existe un autre joueur ayant battu chacun de ces k joueurs. Montrer que pour tout k, il existe des tournois k-indécis si le nombre n de joueurs est assez grand.

Pour plus d'explications, on pourra consulter la page
http://images.math.cnrs.fr/Probabiliser

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On suppose que X_1 est centrée, de variance 1, et que $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n^4)$ en fonction des moments de X_1.

2. Majorer $\mathbb{P}\{S_n > cn\}$ pour tout $c > 0$.

3. Que peut-on conclure sur les variables S_n/n à l'aide du lemme de Borel–Cantelli ?