Leçon 235. Exponentielles de matrices. Applications.

Quelques rappels de théorie

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Lorsqu'il est muni du produit matriciel, $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ forme une algèbre associative.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telle que

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \ .$$

Un exemple de norme sous-multiplicative est la norme subordonnée associée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n \colon x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n \colon \|x\|=1} \|Ax\| \ .$$

L'espace vectoriel $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|$ forme un espace de Banach.

Pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'exponentielle de A par

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A := \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} A^n \ .$$

La série converge absolument, puisque

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\|A^n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\|A\|^n = \mathrm{e}^{\|A\|} \ .$$

Quelques propriétés :

- $\mathrm{e}^0 = I$, où 0 désigne la matrice nulle, et I la matrice identité;
- si $AB = BA$, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ (ce n'est pas le cas en général si $AB \neq BA$);
- $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\operatorname{Tr} A}$, où $\operatorname{Tr} A$ désigne la trace de A;
- e^A est non singulière, et $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

Soit le système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants $a_{ij} \in \mathbb{K}$

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) \ , \qquad i = 1, \dots, n \ .$$

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice à coefficients a_{ij}. Alors ce système peut s'écrire

$$x'(t) = Ax(t) \ .$$

Pour toute valeur initiale $x(0) \in \mathbb{K}^n$, ce système admet une unique solution, définie sur $\mathbb{R}$, donnée par

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\, x(0) \ .$$

Exercices

Exercice 1. Calculer par récurrence les puissances entières des matrices suivantes (a, b désignant des nombres réels). En déduire leur exponentielle en sommant la série.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} , \qquad D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non singulière et soit $B = S^{-1}AS$. Montrer que

$$\mathrm{e}^B = S^{-1}\,\mathrm{e}^A\,S .$$

En déduire une manière de calculer e^A si $S^{-1}AS$ est diagonale.

Application : On considère l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0 .$$

1. Ecrire cette équation comme un système du premier ordre pour $(x, y = x')$.
2. Trouver une base dans laquelle ce système est diagonal.
3. Résoudre le système dans la nouvelle base.
4. En déduire deux solutions linérairement indépendantes de l'équation initiale.

Exercice 3. On suppose que $A = D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente (il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m = 0$) et $DN = ND$. Montrer que

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^D \left(I + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1} \right) .$$

Application : On considère l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 .$$

1. Ecrire cette équation comme un système du premier ordre pour $(x, y = x')$.
2. Trouver une base dans laquelle ce système est de forme triangulaire supérieure.
3. Résoudre le système dans la nouvelle base.
4. En déduire deux solutions linérairement indépendantes de l'équation initiale.

Exercice 4. Résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires définis par les matrices suivantes, et esquisser leurs orbites. Les paramètres a, b sont des nombres réels, et on distinguera les cas selon leur signe (strictement positif, nul, strictement négatif).

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} .$$

Exercice 5. On considère l'équation différentielle du second ordre de l'oscillateur harmonique amorti :

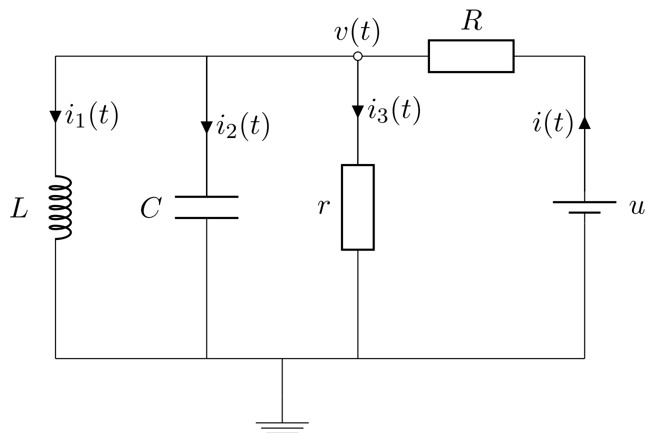
$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = 0 ,$$

où $\gamma \geqslant 0$ et $\omega > 0$. Ecrire cette équation sous la forme d'un système du premier ordre pour les fonctions $x(t)$ et $x'(t)$. Résoudre ce système et esquisser ses orbites en fonction de la valeur de γ et ω.

Exercice 6. Démontrer les propriétés données dans le rappel de théorie :

1. $\mathrm{e}^0 = I$.
2. Si $AB = BA$, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$. Donner un contre-exemple avec $AB \neq BA$.
3. $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\operatorname{Tr} A}$.
   Indications : il y a plusieurs approches possibles.
   (a) Travailler dans une base dans laquelle A est triangulaire.
   (b) Soit $f(t) = \det(\mathrm{e}^{At})$. Calculer $f'(t)$.
   (c) Utiliser un argument de densité des matrices diagonalisables dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.
4. e^A est non singulière, et $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

Exercice 7. Voici un exemple de circuit RCL :



1. Déterminer une équation différentielle du second ordre pour $v(t)$, sachant que le circuit satisfait
   - la loi des nœuds de Kirchhoff : la somme algébrique des courants en chaque nœud est nulle;
   - la loi des mailles de Kirchhoff : la somme algébrique des différences de potentiel le long de tout maille est nulle;
   - la loi d'Ohm : $v(t) - u = Ri(t)$ et $v(t) = ri_3(t)$;
   - la loi de Lenz–Faraday : $v(t) = Li_1'(t)$;
   - et la relation $Q(t) = Cv(t)$, où $Q'(t) = i_2(t)$.
2. Résoudre cette équation et discuter la nature de ses solutions en fonction des paramètres R, C, L, u.