Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes – Leçon 204

Rappels de théorie

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

Soit $p \in [1, \infty[$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \ .$$

On admettra que $\|\cdot\|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire pour tout $p \in [1, \infty]$, et que par conséquent $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour tous ces p.

Normes subordonnées

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectories normés. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On appelle norme subordonnée (ou norme opérateur) de φ la quantité

$$\|\varphi\|_{\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F} = \sup_{x \in E\colon \|x\|_E > 0} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} \ . \tag{1}$$

Exercices

Exercice 1 (Boules unité).
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On appelle boule (ouverte) unité l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{x \in E\colon \|x\|_E < 1\right\} \ .$$

Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, représenter graphiquement les boules unité pour les normes $\|\cdot\|_p$ pour tout $p \geqslant 1$. On distinguera les cas $p = 1$, $1 < p < 2$, $p = 2$, $2 < p < \infty$ et $p = \infty$.

Exercice 2 (Equivalence des normes).
Soit $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Déterminer les constantes optimales $c(n)$ et $C(n)$ telles que

$$c(n)\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant C(n)\|x\|_q \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Quels sont les x pour lesquels les inégalités sont saturées (c-à-d deviennent des égalités)?

Exercice 3 (Convergence d'une suite).
Soit $(x_k)_{k\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que s'il existe $p \in [1, \infty]$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\|_p = 0$$

alors on a

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\|_q = 0$$

pour tout $q \in [1, \infty]$.

Exercice 4 (Définition équivalente de la norme subordonnée)**.**
Montrer que si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, et $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\|\cdot\|_E,\|\cdot\|_F} &= \sup_{x\in E\colon \|x\|_E=1} \|\varphi(x)\|_F \ , \\ \|\varphi\|_{\|\cdot\|_E,\|\cdot\|_F} &= \inf\Big\{c \geqslant 0\colon \|\varphi(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E \ \forall x \in E\Big\} \ .\end{aligned}$$

Exercice 5 (Normes subordonnées matricielles)**.**
Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire, et soit A sa matrice dans la base canonique. Nous écrirons $\|\varphi\|_{p,q}$ au lieu de $\|\varphi\|_{\|\cdot\|_p,\|\cdot\|_q}$.

1. Exprimer $\|\varphi\|_{1,1}$ en fonction des éléments a_{ij} de la matrice A.
   Pour quels x le supremum dans (1) est-il atteint?
2. Exprimer $\|\varphi\|_{\infty,\infty}$ en fonction des éléments a_{ij} de la matrice A.
   Pour quels x le supremum dans (1) est-il atteint?
3. Exprimer $\|\varphi\|_{2,2}$ en fonction des valeurs propres de la matrice $A^T A$ (leurs racines sont appelées valeurs singulières de A).
   Pour quels x le supremum dans (1) est-il atteint?
4. Exprimer $\|\varphi\|_{1,\infty}$ en fonction des éléments a_{ij} de la matrice A.
   Pour quels x le supremum dans (1) est-il atteint?

Exercice 6 (Norme opérateur et composition)**.**
Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ des applications linéaires. On munit $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^k$ de normes $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ et $\|\cdot\|_r$ pour $p, q, r \in [1, \infty]$. Montrer que

$$\|\psi \circ \varphi\|_{p,r} \leqslant \|\varphi\|_{p,q}\|\psi\|_{q,r} \ .$$

Exercice 7 (Applications linéaires et continuité*)**.**

1. Montrer que toute application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue.
2. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rrcl}\Psi & : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (\varphi, x) & \mapsto & \varphi(x)\end{array}$$

   est bilinéaire et continue.