Leçon 231
Espérance, variance, loi faible des grands nombres

Rappels de théorie

Variables aléatoires discrètes

Soit Ω un ensemble non vide, fini ou dénombrable.
L'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A\colon A \subset \Omega\}$ des parties de Ω est une tribu sur Ω.
Soit $p : \Omega \to [0,1]$ une application telle que

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1 \ .$$

Alors l'application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé discret.
Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{X(\omega)\colon \omega \in \Omega\}$ l'image de X et $\{X = k\} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = k\}$ l'événement "X est égal à k". On dit que X est intégrable si

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)|X(\omega)| < +\infty \ .$$

Si X est intégrable, alors on définit son espérance par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)X(\omega) \ .$$

De manière équivalente, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}\{X = k\} \ .$$

Variables aléatoires à densité

Soit $\Omega = \mathbb{R}$. On peut munir Ω d'une tribu $\mathcal{B}$, appelée tribu des boréliens, qui contient en particulier tous les intervales (ouverts ou fermés) de $\mathbb{R}$.
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, que nous supposerons continue par morceaux, est appelée une densité si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$

On dit que X est une variable aléatoire réelle de densité f si

$$\mathbb{P}\{X \in [a,b]\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout intervalle $[a,b] \in \mathcal{B}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On dit que $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
La variable aléatoire X est dite intégrable si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, \mathrm{d}x < +\infty \ .$$

Si X est intégrable, on définit son espérance par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x \ .$$

Cette construction s'étend à des n-uplets $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires (ou vecteurs aléatoires), en prenant $\Omega = \mathbb{R}^n$ et en considérant des densités $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

Quelques propriétés de l'espérance

Soient $X_1, X_2, \dots X_n$ des variables aléatoires réelles intégrables, définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ est intégrable et

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1 \mathbb{E}(X_1) + \dots + a_n \mathbb{E}(X_n)$$

pour tout choix de $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (linéarité de l'espérance).
On écrit $\mathbb{P}\{X_1 \in A, X_2 \in B\}$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in B\})$. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots X_n$ sont dites indépendantes si

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \mathbb{P}\{X_2 \in A_2\} \dots \mathbb{P}\{X_n \in A_n\}$$

pour tout choix d'intervalles $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathbb{R}$.
Si $X_1, X_2, \dots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et telles que $X_1 X_2 \dots X_n$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_n) \ .$$

Variance, covariance, écart-type, corrélation

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$.

- La covariance de X et Y est définie par

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)] \Big) \ .$$

- La variance de X est définie par $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{cov}(X,X)$.
- L'écart-type de X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.
- Si $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$, on définit le coefficient de corrélation de X et Y par

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \ .$$

- Si $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont non corrélées.

Exercices

Exercice 1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire réelle X dans les cas où X suit les lois suivantes.

- Loi de Bernoulli: $\Omega = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}\{X=1\} = p = 1 - \mathbb{P}\{X=0\}$ pour un $p \in [0,1]$.
- Loi uniforme: $\Omega = \{1,\dots,n\}$ et $\mathbb{P}\{X=k\} = 1/n$ pour tout $k \in \Omega$.
- Loi de Poisson: $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}\{X=k\} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$ pour un $\lambda > 0$.
- Loi binomiale: $\Omega = \{0,\dots,n\}$ et $\mathbb{P}\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour un $p \in [0,1]$.
- Loi géométrique: $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}$ pour un $p \in]0,1[$.

Exercice 2. Déterminer si X est intégrable et, le cas échéant, calculer son espérance dans les cas où X admet les densités f suivantes.

- Loi uniforme sur $[a,b]$ (avec $b > a$):
$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x \in [a,b] \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$
- Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:
$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$
- Loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \,.$$
- Loi de Cauchy de paramètre $c > 0$:
$$f(x) = \frac{c}{\pi}\frac{1}{x^2+c^2} \,.$$
- Loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \,, \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$

Exercice 3 (Propriétés de la variance)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. $\mathrm{Var}(X) \geqslant 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}\{X = \mathbb{E}(X)\} = 1$.
3. Pour tout choix de $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$.
4. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
5. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$.
6. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
7. $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$ (on pourra considérer l'application $(a,b) \mapsto \mathrm{Var}(aX+bY)$).

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les variances des variables aléatoires des deux premiers exercices. On rappelle les identités

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} , \quad b^3 - a^3 = (b-a)(a^2+ab+b^2) .$$

Exercice 5 (Preuves de l'inégalité de Markov)**.** L'inégalité de Markov affirme que si X est une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors

$$\mathbb{P}\{X \geqslant a\} \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}(X)$$

pour tout $a > 0$.

1. **Cas discret.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret.
   Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et soit $a > 0$. Ecrire explicitement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{P}\{X \geqslant a\}$ sous forme de sommes, et montrer que
   $$\mathbb{E}(X) \geqslant a\mathbb{P}\{X \geqslant a\} .$$
2. **Cas d'une variable aléatoire réelle à densité.** Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une densité f et soit $a > 0$. Ecrire explicitement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{P}\{X \geqslant a\}$ sous forme d'intégrales, et montrer que
   $$\mathbb{E}(X) \geqslant a\mathbb{P}\{X \geqslant a\} .$$

Exercice 6 (Inégalité de Bienaymé–Tchebychev)**.** Soit X une variable aléatoire réelle telle que X^2 soit intégrable. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}\big\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\big\} \leqslant \frac{1}{a^2}\,\mathrm{Var}(X) .$$

Application: On lance 1000 fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit S le nombre de Pile obtenus. Donner une majoration de la probabilité que S ne soit pas compris entre 481 et 519.

Exercice 7 (Loi faible des grands nombres)**.** On se donne des variables aléatoires réelles intégrables $X_1, X_2, \dots$, non corrélées, ayant toutes la mêmes espérance μ et la même variance $\sigma^2 < +\infty$. Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

- Calculer $\mathbb{E}(S_n/n)$ et $\mathrm{Var}(S_n/n)$.
- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
  $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigg\{\bigg|\frac{S_n}{n} - \mu\bigg| \geqslant \varepsilon\bigg\} = 0 .$$