Leçon 232 — Variables aléatoires possédant une densité. Exemples

Corrigé des exercices

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\, t} \;.$$

   - Première démonstration, utilisant l'intégration complexe :

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty \lambda\, \mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\, t)x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{\lambda\, \mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\, t)x}}{-\lambda + \mathrm{i}\, t}\right]_0^\infty = 0 - \frac{\lambda}{-\lambda + \mathrm{i}\, t} \;.$$

   - Seconde démonstration, sans analyse complexe : $\varphi_X(t) = I_1(t) + I_2(t)$ avec

$$I_1(t) = \int_0^\infty \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \cos(tx) \,\mathrm{d}x \;, \qquad I_2(t) = \int_0^\infty \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \sin(tx) \,\mathrm{d}x \;.$$

     En intégrant par parties, on obtient

$$I_1(t) = -\frac{t}{\lambda} I_2(t) + 1 \;, \qquad I_2(t) = \frac{t}{\lambda} I_1(t) \;.$$

     La solution de ce système est donnée par

$$I_1(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \;, \qquad I_2(t) = \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2} \;,$$

     d'où le résultat, puisque $\lambda^2 + t^2 = (\lambda + \mathrm{i}\, t)(\lambda - \mathrm{i}\, t)$.

2. La fonction caractéristique est analytique dans le disque $|t| < \lambda$, donc X admet des moments de tout ordre. En utilisant le développement en série géométrique, on a

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - \mathrm{i}\, t/\lambda} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\mathrm{i}\, t}{\lambda}\right)^n$$

   pour tout t tel que $|t| < \lambda$. Par ailleurs, par définition de la fonction exponentielle et la linéarité de l'espérance, on a pour $|t| < \lambda$

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tX}) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\mathrm{i}\, t)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) \;.$$

   Par unicité du développement en séries, on obtient

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n} \qquad \forall n \geqslant 0 \;.$$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite.

1. La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} \ .$$

- Première démonstration, en complétant le carré et avec un argument d'analyse complexe :

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx - x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i}\,t)^2/2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \ .$$

Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ le contour d'intégration rectangulaire de sommets $-L$, L, $L - \mathrm{i}\,t$ et $-L - \mathrm{i}\,t$. Le théorème de Cauchy permet d'affirmer que l'intégrale de la fonction $\mathrm{e}^{-z^2/2}$ le long de ce contour est nulle. Comme l'intégrale sur les segments verticaux tend vers 0 lorsque $L \to \infty$, on conclut que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i}\,t)^2/2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \ .$$

- Seconde démonstration, sans analyse complexe :
La fonction $x \mapsto \sin(tx) \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ étant impaire, son intégrale, étant absolument convergente, s'annule. Comme la fonction $x \mapsto \cos(tx) \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est paire, on a

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos(tx) \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \ .$$

En dérivant par rapport à t et on intégrant par parties on obtient

$$\varphi_X'(t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \sin(tx) x \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = -t\varphi_X(t) \ .$$

L'unique solution de cette équation différentielle linéaire telle que $\varphi_X(0) = 1$ est donnée par $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Remarquons que $Y = \sigma X$ suit une loi normale centrée de variance σ^2 et que sa fonction caractéristique est donc $\varphi_Y(t) = \varphi_X(\sigma t) = \mathrm{e}^{-\sigma^2 t^2/2}$.

2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ est infiniment dérivable, donc X admet des moments de tous les ordres. L'égalité des séries

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) = \sum_{\ell \geqslant 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell! 2^\ell} t^{2\ell}$$

montre que

$$\mathbb{E}\bigl(X^n\bigr) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair ,} \\ \dfrac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} & \text{si } n = 2\ell \text{ est pair .} \end{cases}$$

En séparant les termes pairs et impairs de $(2\ell)!$, la dernière expression peut être récrite sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} &= \frac{2\ell(2\ell-2)\dots 4\cdot 2}{2^\ell \ell!}(2\ell-1)(2\ell-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1 \\ &= (2\ell-1)(2\ell-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1\ ,\end{aligned}$$

cette dernière quantité étant souvent dénotée $(2\ell-1)!!$.

Exercice 3. Pour une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto, on trouve

$$\mathbb{E}(|X|^k) = \mathbb{E}(X^k) = \alpha a^\alpha \int_a^\infty x^{k-\alpha-1}\,\mathrm{d}x\ .$$

L'intégrale est convergente si et seulement si $k < \alpha$. Pour ces valeurs de k, X admet un moment d'ordre k et en calculant l'intégrale on trouve

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\alpha}{\alpha-k}a^k\ .$$

Exercice 4 (Le théorème d'Isserlis et Wick)**.**
On se donne des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$, toutes de loi normale et centrées. On dénote par K leur matrice de covariance, c'est-à-dire la matrice de taille $n\times n$ d'éléments

$$K_{ij} = \operatorname{cov}(X_i,X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j)$$

1. $Y = \langle t,X\rangle$ est une variable aléatoire réelle, suivant une loi normale centrée. Sa variance se calcule en observant que

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\biggl(\sum_{i,j=1}^n t_it_jX_iX_j\biggr) = \sum_{i,j=1}^n t_it_jK_{ij} = \langle t,Kt\rangle\ .$$

   Par la remarque faite à l'exercice 2, on a donc

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Y}) = \mathrm{e}^{-\langle t,Kt\rangle/2}\ .$$

2. L'égalité des développements en série de $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle})$ et $\mathrm{e}^{-\langle t,Kt\rangle/2}$ s'écrit

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{\mathrm{i}^k}{k!}\mathbb{E}\bigl(\langle t,X\rangle^k\bigr) = \sum_{m\geqslant 0}\frac{(-1)^m}{2^m m!}\langle t,Kt\rangle^m\ .$$

   On en déduit que pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigl(\langle t,X\rangle^{2m+1}\bigr) &= 0\ ,\\ \mathbb{E}\bigl(\langle t,X\rangle^{2m}\bigr) &= \frac{(2m)!}{2^m m!}\langle t,Kt\rangle^m\ .\end{aligned}$$

3. Posant $k = n = 2m$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient l'égalité suivante entre polynomes homogènes de degré n des n variables $t_1, \ldots, t_n$:

$$\mathbb{E}\big(\langle t, X\rangle^n\big) = \frac{n!}{2^m m!}\langle t, Kt\rangle^m \; .$$

D'une part, on remarque que

$$\langle t, X\rangle^n = \left(\sum_{j=1}^n t_j X_j\right)^n = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n t_{j_1} \ldots t_{j_n} X_{j_1} \ldots X_{j_n} \; .$$

Le coefficient de $t_1 \ldots t_n$ de ce polynôme est

$$n! X_1 \ldots X_n \; ,$$

puisque les $n!$ permutations des indices $1, \ldots, n$ donnent la même contribution au monôme en $t_1 \ldots t_n$. D'autre part, on a

$$\langle t, Kt\rangle^m = \left(\sum_{k,\ell=1}^n K_{k\ell} t_k t_\ell\right)^m = \sum_{k_1,\ell_1=1}^n \cdots \sum_{k_m,\ell_m=1}^n K_{k_1\ell_1} \ldots K_{k_m\ell_m} t_{k_1} t_{\ell_1} \ldots t_{k_m} t_{\ell_m} \; .$$

Le coefficient de $t_1 \ldots t_n$ de ce polynôme est

$$2^m m! \sum_{\pi=\{\{k_1,\ell_1\},\ldots,\{k_m,\ell_m\}\}\in\mathcal{P}_{2,2m}} K_{k_1\ell_1} \ldots K_{k_m\ell_m} \; .$$

En effet, chaque partition $\pi \in \mathcal{P}_{2,2m}$ donne lieu à $2^m m!$ termes égaux, correspondant aux $2^m m!$ permutations des indices laissant la partition invariante. En en déduit l'égalité

$$\mathbb{E}(X_1 \ldots X_n) = \sum_{\pi=\{\{k_1,\ell_1\},\ldots,\{k_m,\ell_m\}\}\in\mathcal{P}_{2,2m}} K_{k_1\ell_1} \ldots K_{k_m\ell_m} \; .$$

Par exemple, pour $n = 4$ on obtient

$$\mathbb{E}(X_1X_2X_3X_4) = \mathbb{E}(X_1X_2)\mathbb{E}(X_3X_4) + \mathbb{E}(X_1X_3)\mathbb{E}(X_2X_4) + \mathbb{E}(X_1X_4)\mathbb{E}(X_2X_3) \; .$$

Dans le cas où $X_1 = X_2 = X_3 = X_4$ suit une loi normale centrée de variance σ^2, on obtient

$$\mathbb{E}(X_1^4) = 3\mathbb{E}(X_1^2)^2 = 3\sigma^4 \; .$$

Si $\sigma = 1$ on retrouve un cas particulier de l'exercice 2.

Exercice 5 (Fonction de comptage du processus de Poisson)**.**
Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Pour $k = 1, \dots n$, on pose

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i \;, \qquad N_k(t) = \sum_{i=1}^{k} 1\!\!1_{\{X_i \leqslant t\}} \;.$$

1. La densité conjointe de $(Z_1, \dots, Z_n)$ est donnée par

$$f_{Z_1,\dots,Z_n}(z_1, \dots, z_n) = \lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda(z_1+\dots+z_n)} \, 1\!\!1_{\{z_1>0,\dots,z_n>0\}} \;.$$

   Le difféomorphisme permettant d'exprimer Z en fonction de X s 'écrit

$$g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) \;.$$

   Sa matrice jacobienne est triangulaire, avec des 1 sur la diagonale, donc son Jacobien vaut 1. Le théorème de changement de variable montre que la densité conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ vaut

$$\begin{aligned} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) &= f_{Z_1,\dots,Z_n}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) \\ &= \lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda x_n} \, 1\!\!1_{\{0<x_1<\dots<x_n\}} \;. \end{aligned}$$

   On a donc nécessairement $\mathbb{P}\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\} = 1$, puisque la densité est nulle en dehors de cet ensemble.

2. La densité conjointe de $(X_1, \dots, X_{n-1})$ est donnée par

$$\int_{x_{n-1}}^{\infty} \lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda x_n} \, 1\!\!1_{\{0<x_1<\dots<x_{n-1}\}} \, \mathrm{d}x_n = \lambda^{n-1} \, \mathrm{e}^{-\lambda x_{n-1}} \, 1\!\!1_{\{0<x_1<\dots<x_{n-1}\}} \;.$$

   Par récurrence, on trouve pour la densité conjointe de $(X_1, \dots, X_k)$

$$f_{X_1,\dots,X_k}(x_1, \dots, x_k) = \lambda^k \, \mathrm{e}^{-\lambda x_k} \, 1\!\!1_{\{0<x_1<\dots<x_k\}} \;, \qquad k = 1, \dots, n \;.$$

3. La densité conjointe de $(X_2, \dots, X_k)$ est donnée par

$$\int_0^{x_2} \lambda^k \, \mathrm{e}^{-\lambda x_k} \, 1\!\!1_{\{x_2<\dots<x_k\}} \, \mathrm{d}x_1 = \lambda^k x_2 \, \mathrm{e}^{-\lambda x_k} \, 1\!\!1_{\{x_2<\dots<x_k\}} \;.$$

   Par récurrence, on trouve pour la densité conjointe de $(X_\ell, \dots, X_k)$

$$f_{X_\ell,\dots,X_k}(x_\ell, \dots, x_k) = \frac{\lambda^k}{(\ell-1)!} x_\ell^{\ell-1} \, \mathrm{e}^{-\lambda x_k} \, 1\!\!1_{\{x_\ell<\dots<x_k\}} \;, \qquad \ell = 1, \dots, k \;.$$

4. Comme $X_1 < X_2 < \dots < X_n$, on a $\{X_{k+1} \leqslant t\} \subset \{X_k \leqslant t\}$, donc $1\!\!1_{\{X_{k+1} \leqslant t\}} \leqslant 1\!\!1_{\{X_k \leqslant t\}}$ pour tout $k \leqslant n-1$. L'événement $N_n(t) = k$ ne peut donc se réaliser que si les k premiers X_i sont inférieurs ou égaux à t, alors que les autres X_i sont supérieurs à t. En d'autres termes, on a $\mathbb{P}\{N_n(t) = k\} = \mathbb{P}\{X_k \leqslant t, X_{k+1} > t\}$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

5. Il suit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_n(t)=k\} &= \int_0^t \int_t^\infty f_{X_k,X_{k+1}}(x_k,x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}\,\mathrm{d}x_k \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!}\int_0^t x_k^{k-1}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x_{k+1}}\,\mathrm{d}x_{k+1}\,\mathrm{d}x_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\end{aligned}$$

pour $k=1,\dots,n-1$, alors que $\mathbb{P}\{N_n(t)=n\}$ se déduit du fait que la somme des $\mathbb{P}\{N_n(t)=k\}$ vaut 1. Faisant tendre n vers l'infini, on obtient que la loi de la limite est une loi de Poisson de paramètre λt.