Leçon 232
Variables aléatoires possédant une densité. Exemples

Rappels de théorie

Théorème de transfert (ou de transport)

Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une densité f. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Alors la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| f(x) \,\mathrm{d}x < \infty$$

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) \,\mathrm{d}x$$

Ce résultat se généralise à des vecteurs aléatoires, définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Moments et fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire réelle, de densité f.
On appelle moment d'ordre k l'espérance de X^k, si celle-ci existe.
On appelle fonction caractéristique la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}) = \mathbb{E}(\cos(tX) + \mathrm{i}\sin(tX))$$

Si X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors φ_X est k fois dérivable et pour tout $\ell \leqslant k$, on a

$$\varphi_X^{(\ell)}(t) = \mathrm{i}^\ell\, \mathbb{E}(X^\ell\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX})$$

En particulier, $\varphi_X^{(\ell)}(0) = \mathrm{i}^\ell\, \mathbb{E}(X^\ell)$.

Si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire, sa fonction caractéristique est la fonction de $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, X\rangle}) \qquad \text{où } \langle t, X\rangle = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j$$

Exercices

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X.
2. Montrer que X admet des moments de tout ordre, et les calculer.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite.

1. Calculer la fonction caractéristique de X.
2. Montrer que X admet des moments de tout ordre, et les calculer.

Exercice 3. On dit que X suit une loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $a > 0$ si elle admet la densité

$$f(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} \mathbb{1}_{x \geqslant a}$$

Pour quelles valeurs de k la variable X admet-elle un moment d'ordre k?

Exercice 4 (Le théorème d'Isserlis et Wick)**.**
On se donne des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, toutes de loi normale et centrées. On dénote par K leur matrice de covariance, c'est-à-dire la matrice de taille $n \times n$ d'éléments

$$K_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_i) = \mathbb{E}(X_i X_j)$$

1. Quelle est la fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle})$ du vecteur Gaussien $X = (X_1, \dots, X_n)$?
2. Exprimer $\mathbb{E}(\langle t, X\rangle^k)$ en fonction de la forme quadratique $\langle t, Kt\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Distinguer les cas où k est pair et impair.
3. Dans le cas où $k = n = 2m$ est pair, montrer que

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_{2m}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{2,2m}} \prod_{(i,j)\in\pi} \mathbb{E}(X_i X_j)$$

   où $\mathcal{P}_{2,2m}$ désigne l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, 2m\}$ en m paires $\{i, j\}$.

Exercice 5 (Fonction de comptage du processus de Poisson)**.**
Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Pour $k = 1, \dots n$, on pose

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i \ , \qquad N_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_i \leqslant t\}} \ .$$

1. Déterminer la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$.
   Que vaut $\mathbb{P}\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$?
2. Déterminer la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_{n-1})$ (marginale par rapport à X_n), puis la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_k)$ pour tout $k = 2, \dots, n-2$.
3. Déterminer la loi conjointe de $(X_2, \dots, X_k)$ (marginale par rapport à X_1), puis la loi conjointe de $(X_l, \dots, X_k)$ pour tout $l = 3, \dots, k-1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}\{N_n(t) = k\} = \mathbb{P}\{X_k \leqslant t, X_{k+1} > t\}$ pour $k = 1, \dots, n-1$.
5. Déterminer la loi de $N_n(t)$, puis celle de $\lim_{n\to\infty} N_n(t)$.