Leçon 258 — Couples de variables aléatoires possédant une densité. Couples de variables aléatoires possdant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.

Rappels de théorie

Densités et densités marginales

Définition 1. Une *densité* sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 1 \;.$$

On dit qu'un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires réelles admet la densité f si

$$\mathbb{P}\big\{(X_1, X_2) \in B\big\} = \int_B f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^2$ (donc en particulier pour tout ouvert et tout fermé B).

En appliquant cette définition aux ensembles de la forme $B =]-\infty, t_1]\times]-\infty, t_2]$, on obtient

$$F_{X_1,X_2}(t_1, t_2) := \mathbb{P}\big\{X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2\big\} = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \;.$$

Le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les intégrations (cela suit du théorème de Fubini). La fonction F_{X_1,X_2} joue donc un rôle analogue à celui de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

De plus, la fonction de répartition de X_1 est donnée par

$$F_{X_1}(t_1) = \mathbb{P}\big\{X_1 \leqslant t_1\big\} = \lim_{t_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \;.$$

On a une expression analogue pour F_{X_2}.

Définition 2. On appelle *première* et *seconde densité marginale* de f les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \;, \\ f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \;. \end{aligned}$$

Avec ces définitions, on a

$$F_{X_1}(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \;, \qquad F_{X_2}(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \;,$$

c'est-à-dire que $f_1 = f_{X_1}$ est la densité de X_1 et $f_2 = f_{X_2}$ est la densité de X_2.

Indépendance

Théorème 3. *Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, admettant une densité f, de marginales f_1 et f_2. Alors X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si*

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \;.$$

Théorème de transfert

Théorème 4. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires réelles, admettant une densité f. Une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet une espérance si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \big|\phi(x_1, x_2)\big| f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 < \infty \; .$$

Dans ce cas

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x_1, x_2) f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \; .$$

Définition 5. Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(X_2^2) < \infty$. Alors leur covariance est définie par

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}\big([X_1 - \mathbb{E}(X_1)][X_2 - \mathbb{E}(X_2)]\big) \; .$$

Si $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$, on dit que X_1 et X_2 sont *non corrélées*.

Théorème 6. *Deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées.*

Changement de variable

Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts. Un *difféomorphisme* de A vers B est une bijection continûment différentiable $\varphi : A \to B$ dont la réciproque φ^{-1} est également continûment différentiable.

Théorème 7. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires admettant la densité f_X. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts tels que $f_X(x_1, x_2) = 0$ si $(x_1, x_2) \notin A$ et soit g un difféomorphisme de A vers B. Alors $Y = g(X)$ est un couple de variables aléatoires admettant la densité*

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(g^{-1}(y_1, y_2)) \big|\operatorname{Jac} g^{-1}(y_1, y_2)\big|$$

où, pour une application différentiable $h : B \to A$,

$$\operatorname{Jac} h(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

dénote son Jacobien*.*

Somme de variables aléatoires

Théorème 8. *Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, admettant une densité f_X. Alors la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ admet la densité*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y - x_2, x_2) \, \mathrm{d}x_2 \; .$$

Corollaire 9. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, de densités respectives f_1 et f_2. Alors $Y = X_1 + X_2$ admet la densité*

$$f_Y(y) = (f_1 \star f_2)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) \, \mathrm{d}x_2 \; .$$

$f_1 \star f_2$ est appelée la convolution *de f_1 et f_2.*

Exercices

Exercice 1 (Algorithme de Box–Müller)**.** Soient U et V deux variables aléatoires réelles, indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la densité du couple

$$(X,Y) = \left(\sqrt{-2\log(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\log(U)}\sin(2\pi V)\right) .$$

Quelles sont les lois marginales de X et de Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soit X une variable de loi normale centrée réduite.

1. Soit $Y = |X|$. Calculer $\operatorname{cov}(X,Y)$. Que peut-on en déduire ?
2. Même question si $Y = Z\operatorname{sign}(X)$, où Z est indépendante de X, et de même loi que X.
3. Même question si $Y = Z$ si $X \geqslant 0$ et $Y = -2Z$ si $Z < 0$.

Exercice 3 (Variables aléatoires gaussiennes)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

une matrice symétrique, définie positive ($\det A > 0$ et $\operatorname{Tr} A > 0$). Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\langle x, Ax \rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 .$$

On considère un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{\det A}}{2\pi} \, \mathrm{e}^{-\langle x, Ax \rangle/2} .$$

1. Calculer la covariance de X_1 et X_2.
2. Montrer que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.
3. Calculer la densité de $X_1 + X_2$.
4. Calculer les lois marginales de X_1 et de X_2.

Exercice 4 (Loi Gamma)**.** Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. Calculer par récurrence sur n la densité de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la densité du couple (X,Y) est donnée par f, avec

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y\ , \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer les densités marginales f_1 de X et f_2 de Y.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes?
4. Calculer
$$\mathbb{P}\left\{\frac{X}{Y} \leqslant z \text{ et } Y \leqslant t\right\}$$
pour $z \in [0,1]$. En déduire la loi de X/Y.
5. Les variables X/Y et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 6 (Aiguille de Buffon)**.** On laisse tomber une aiguille de longueur $a < 1$ sur une feuille recouverte de lignes parallèles orientées Est–Ouest, distantes de 1.

1. Décrire la position de l'aiguille tombée par deux variables aléatoires $Y \in [0,1[$ et $\Phi \in [0,2\pi[$, donnant respectivement la distance du centre de l'aiguille à la ligne la plus proche au Sud du centre, et l'angle de l'aiguille par rapport au Nord. Quelle loi vous semble raisonnable pour ce couple de variables ?
2. Calculer la probabilité que l'aiguille coupe une ligne.

Exercice 7 ("Paradoxe" de Bertrand)**.** Soit un cercle de rayon 1. Tout triangle équilatéral inscrit dans le cercle a des côtés de longueur $\sqrt{3}$.

Calculer la probabilité qu'une corde choisie au hasard soit plus longue que $\sqrt{3}$ dans les trois situations suivantes :

1. Une extrémité de la corde est fixe, et l'autre est choisie de manière uniforme sur le cercle.
2. On choisit un rayon du cercle uniformément au hasard. Puis on choisit un point de manière uniforme sur ce rayon. La corde est celle qui est perpendiculaire au rayon et passe par le point choisi.
3. On choisit un point uniformément au hasard dans le cercle. La corde est celle dont ce point est le milieu.