Leçon 241. Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples

Corrigé partiel des exercices

Exercice 2.

1. Pour tout $x > 0$ on a
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(nx) = \lim_{y\to\infty} f(y) = 0 \; .$$
Par ailleurs, $f_n(0) = f(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suit que f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$.
Soit
$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)| \; .$$
Par hypothèse, M est non nul. La continuité de f implique qu'il existe au moins un $x_0 \in]0, \infty[$ tel que $|f(x_0)| = M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}_+} |f(y)| = |f(x_0)| = M \; .$$
Par conséquent, f_n ne converge pas uniformément vers 0.
2. Un raisonnement analogue à celui du cas précédent montre que g_n converge simplement vers 0. Par ailleurs,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\frac{f(nx)}{n}\right| = \frac{1}{n} \sup_{y\in\mathbb{R}_+} |f(y)| = \frac{M}{n} \; .$$
Comme $\frac{M}{n}$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, g_n converge uniformément vers 0.
3. h_n converge simplement vers 0, mais pas uniformément puisque $|h_n(nx_0)| = M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. k_n converge simplement et uniformément vers 0.

Exercice 3.

1. Une condition nécessaire pour que la série de terme général u_n soit convergente est que
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, a) = 0 \; .$$
Si $x < 0$, le fait que $\mathrm{e}^{-nx} \geqslant (-nx)^k/k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ montre que u_n ne converge pas vers 0, donc la série ne peut converger. Il suffit donc de considérer les cas où $x \geqslant 0$.
Si $x > 0$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x, a)}{u_n(x, a)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = \mathrm{e}^{-x} \in]0, 1[\; .$$
Le critère de d'Alembert montre que la série converge pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Si $x = 0$, alors $u_n(0, a) = 1/n^a$ et le critère de Riemann montre que la série converge si et seulement si $a > 1$.

2. On a $u_n(x,0) = \mathrm{e}^{-nx}$, qui est une fonction décroissante. Pour tout $\delta > 0$,

$$\sup_{x\in[\delta,\infty[} u_n(x,0) = u_n(\delta,0) = \mathrm{e}^{-n\delta} \; .$$

La série de terme général $\mathrm{e}^{-n\delta}$ étant convergente si $\delta > 0$, on en conclut que la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement, donc elle converge aussi uniformément. Il s'agit en fait d'une série géométrique de raison e^{-x}, dont la somme vaut pour tout $x > 0$

$$f_0(x) = \sum_{n\geqslant 1} (\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1} \; .$$

Remarquons que f_0 diverge en $x = 0$.

3. La série de terme général $u_n(x,1) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$ est normalement et uniformément convergente sur tout intervalle $[\delta,\infty[$ avec $\delta > 0$. Par conséquent, sa somme $f_1(x)$ est dérivable pour tout $x > 0$, et sa dérivée vaut

$$f_1'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,1) = \sum_{n\geqslant 1} (-\mathrm{e}^{-nx}) = -f_0(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \; .$$

Il suit que

$$f_1(x) = -\log(1-\mathrm{e}^{-x}) + c$$

pour une constante $c \in \mathbb{R}$. Par ailleurs on vérifie que $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0$, ce qui implique $c = 0$. On remarque que

$$\lim_{x\to 0_+} f_1(x) = +\infty \; .$$

4. La série de terme général $u_n(x,2) = \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-nx}$ est sommable pour tout $x \geqslant 0$, et uniformément convergente sur tout intervalle $[\delta,\infty[$ avec $\delta > 0$. Notons $f_2(x)$ sa somme. En particulier,

$$f_2(0) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \; .$$

Un raisonnement analogue à celui du point précédent montre que pour tout $x > 0$,

$$f_2'(x) = -f_1(x) = \log(1-\mathrm{e}^{-x}) \; ,$$

ce qui implique que pour tout $x > 0$ on a

$$f_2(x) = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \log(1-\mathrm{e}^{-y}) \, \mathrm{d}y \; .$$

Comme $\mathrm{e}^{-y} \geqslant 1-y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|\log(1-\mathrm{e}^{-y})| \leqslant |\log y|$ pour $y > 0$. Or la fonction log est intégrable en $0+$, ce qui montre que f_2 est bien définie sur tout $\mathbb{R}_+$. De plus, f_2 est continue sur $[0,\infty[$ et dérivable sur $]0,\infty[$.

Exercice 4.

1. La variable aléatoire X_n prend les valeurs 0 et $n^{1/p}$, et comme la mesure de Lebesgue de $[0, 1/n]$ vaut $1/n$, sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}\{X_n = n^{1/p}\} = \frac{1}{n} , \qquad \mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n} .$$

   (a) La fonction de répartition de X_n vaut

$$F_n(t) = \mathbb{P}\{X_n \leqslant t\} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 , \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant t < n^{1/p} , \\ 1 & \text{si } t \geqslant n^{1/p} . \end{cases}$$

   Lorsque $n \to \infty$, $F_n(t)$ converge simplement vers la fonction indicatrice $F(t) = 1_{\{t \geqslant 0\}}$, qui est également la fonction de répartition d'une variable aléatoire identiquement nulle. Par conséquent, X_n converge en loi vers 0.

   (b) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{X_n = n^{1/p}\} = \frac{1}{n} .$$

   Par conséquent, X_n converge vers 0 en probabilité lorsque $n \to \infty$.

   (c) Comme

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = |n^{1/p}|^p \, \mathbb{P}\{X_n = n^{1/p}\} = 1 ,$$

   X_n ne converge pas vers 0 dans L^p lorsque $n \to \infty$. En revanche, si $q < p$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|^q) = \lim_{n\to\infty} |n^{1/p}|^q \, \mathbb{P}\{X_n = n^{1/p}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-q/p}} = 0$$

   et par conséquent X_n converge vers 0 dans L^q.

   (d) On a

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega \in]0, 1] .$$

   En effet, si $\omega \in]0, 1]$, alors $X_n(\omega) = 0$ pour tout $n > 1/\omega$, alors que $X_n(0) = n^{1/p}$ pour tout n. Comme $\mathbb{P}(]0, 1]) = 1$, il suit que X_n converge presque sûrement vers 0.

2. Si $n = 2^m + k$, comme la mesure de Lebesgue de $[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$ vaut 2^{-m}, la loi de X_n est donnée par

$$\mathbb{P}\{X_n = 1\} = 2^{-m} , \qquad \mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - 2^{-m} .$$

   Autrement dit, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre 2^{-m}.

   (a) La fonction de répartition $F_n(t) = \mathbb{P}\{X_n \leqslant t\}$ de X_n converge vers $1_{\{t \geqslant 0\}}$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, X_n converge en loi vers 0 lorsque $n \to \infty$.
   Remarque : Si X_n prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ (ou un ensemble discret fixé E), alors on vérifie que X_n converge en loi vers X si et seulement si $\mathbb{P}\{X_n = k\}$ converge vers $\mathbb{P}\{X = k\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (respectivement tout $k \in E$).

(b) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on a $\mathbb{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{X_n = 1\} = 2^{-m}$. Lorsque $n \to \infty$, on a également $2^{-m} \to \infty$. Par conséquent, X_n converge vers 0 en probabilité.

(c) Pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}(|X_n|^p) = 1^p \, \mathbb{P}\{X_n = 1\} = 2^{-m}$. Il suit que X_n converge vers 0 dans L^p.

(d) Pour tout $\omega \in [0,1]$, on peut construire une sous-suite $(n_\ell)_{\ell \geqslant 1}$ tendant vers $+\infty$, telle que $X_{n_\ell}(\omega) = 1$ pour tout $\ell \geqslant 1$, ainsi qu'une sous-suite $(m_\ell)_{\ell \geqslant 1}$ tendant vers $+\infty$, telle que $X_{m_\ell}(\omega) = 0$ pour tout $\ell \geqslant 1$ (par exemple si $\omega = 0$, il suffit de prendre $n_\ell = 2^\ell$ et $m_\ell = 2^{\ell+1} - 1$). Il suit que la suite $(X_n(\omega))_{n \geqslant 1}$ ne converge pour aucun ω, et donc que X_n ne converge pas presque sûrement.

Exercice 5.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$0 \leqslant \mathbb{P}\bigl\{|X_n| > \varepsilon\bigr\} \leqslant \mathbb{P}\bigl\{X_n \geqslant 1\bigr\} = \mathbb{P}\bigl\{X_n > 0\bigr\} \,.$$
Par conséquent, la condition $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigl\{X_n > 0\bigr\} = 0$ implique la convergence en probabilité de X_n vers 0. Réciproquement, si X_n converge vers 0 en probabilité, alors $\mathbb{P}\bigl\{X_n > 0\bigr\} = \mathbb{P}\{|X_n| > \frac{1}{2}\}$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$.

2. Soit A_n l'événement $\{X_n > 0\}$. Si la série des $\mathbb{P}(A_n)$ converge, alors le lemme de Borel–Cantelli implique que
$$\mathbb{P}\Bigl(\limsup_{n\to\infty} A_n\Bigr) = 0 \,.$$
Par conséquent,
$$\mathbb{P}\bigl\{\forall n \geqslant 0 \,, \exists m \geqslant n \colon A_m \neq \emptyset\bigr\} = 0 \,,$$
donc
$$\mathbb{P}\bigl\{\exists n \geqslant 0 \,, \forall m \geqslant n \colon A_m = \emptyset\bigr\} = 1 \,,$$
ou encore
$$\mathbb{P}\bigl\{\exists n \geqslant 0 \,, \forall m \geqslant n \colon X_m = 0\bigr\} = 1 \,.$$
Ceci revient à dire que X_n converge presque sûrement vers 0.
La réciproque est fausse. Prenons par exemple $\Omega = [0,1]$, muni de la tribu des Boréliens et de la mesure de Lebesgue. Alors $X_n(\omega) = 1_{[0,1/n]}(\omega)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. Par conséquent, X_n converge presque sûrement vers 0, alors que la série des $\mathbb{P}\{X_n > 0\}$ diverge.

3. L'une des implications a déjà été montrée à la question précédente. Il reste à montrer que la convergence presque sûre de X_n vers 0 implique la convergence de la série. Nous allons montrer la contraposée. Pour cela, supposons que la série de terme général $\mathbb{P}\{X_n > 0\}$ diverge. Par la seconde partie du Lemme de Borel–Cantelli, si $A_n = \{X_n > 0\}$ on a
$$\mathbb{P}\Bigl(\limsup_{n\to\infty} A_n\Bigr) = 1 \,.$$
Cela revient à dire que
$$\mathbb{P}\bigl\{\forall n \geqslant 1 \,, \exists m \geqslant n \colon X_m > 0\bigr\} = 1 \,.$$
Comme $X_m \in \mathbb{N}$, ceci implique que X_n ne converge pas presque sûrement vers 0.

4. (a) Si $p_n = 1/n^2$, alors $\mathbb{E}(|X_n|) = 1/n^2$, donc X_n converge vers 0 dans L^1. De même X_n converge vers 0 en probabilité et presque sûrement (car la série de terme général $1/n^2$ converge).

   (b) Si $p_n = 1/n$, alors $\mathbb{E}(|X_n|) = 1/n$, donc X_n converge vers 0 dans L^1. De plus, X_n converge vers 0 en probabilité par le point 1. Comme la série harmonique diverge, si les X_n sont indépendantes alors par le point 3. X_n ne converge pas presque sûrement vers 0. Si les X_n ne sont pas indépendantes, on ne peut pas conclure.

5. (a) Si $\lambda_n = 1/n$, alors $\mathbb{E}(|X_n|) = 1/n$ et $\mathbb{P}\{X_n > 0\} = 1 - \mathrm{e}^{-1/n}$, donc X_n converge vers 0 dans L^1 et en probabilité. En revanche, comme $1 - \mathrm{e}^{-1/n}$ est équivalent à $1/n$ lorsque $n \to \infty$ et que la série harmonique diverge, X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement si les X_n sont indépendantes.

   (b) Si $\lambda_n = 1/n^2$, alors $\mathbb{E}(|X_n|) = 1/n^2$ et $\mathbb{P}\{X_n > 1\} = 1-\mathrm{e}^{-1/n^2}$. Par conséquent, X_n converge vers 0 dans L^1 et en probabilité. De plus, comme $1 - \mathrm{e}^{-1/n^2}$ est équivalent à $1/n^2$ lorsque $n \to \infty$, X_n converge presque sûrement vers 0.

6. Dans ce cas, $\mathbb{E}(|X_n|) = n^2\alpha_n$ et $\mathbb{P}\{X_n > 0\} = \alpha_n$. Par conséquent, on trouve que

   (a) Si $\alpha_n = 1/n$, alors X_n converge vers 0 en probabilité, mais pas dans L^1 (car $\mathbb{E}(|X_n|) = n$ pour tout n). De plus, si les X_n sont indépendantes, alors X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement.

   (b) Si $\alpha_n = 1/n^2$, alors X_n converge vers 0 en probabilité et presque sûrement, mais pas dans L^1 (car $\mathbb{E}(|X_n|) = 1$ pour tout n).

   (c) Si $\alpha_n = 1/n^3$, alors X_n converge vers 0 en probabilité, dans L^1 et presque sûrement.

Exercice 6.

1. On a $\mathbb{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{X_n > \varepsilon\} = \mathrm{e}^{-\lambda_n\varepsilon}$. Par conséquent,

$$X_n \to 0 \text{ en probabilité} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \ .$$

2. Soit $p > 0$. Alors

$$\mathbb{E}\big(|X_n|^p\big) = \int_0^\infty x^p \lambda_n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n^p} \int_0^\infty y^p \, \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y \ .$$

   L'intégrale est convergente (c'est une fonction Gamma). Il suit que

$$X_n \to 0 \text{ dans } L^p \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \ .$$

3. Soit $A_n = \{X_n > \varepsilon_n\}$. Alors la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, donc par le lemme de Borel–Cantelli, X_n converge presque sûrement vers 0.

4. Soit $A_n = \{X_n > 1\}$. Le second lemme de Borel–Cantelli permet de conclure.

5. (a) $\lambda_n = n^2$: X_n converge vers 0 en probabilité, dans L^p pour tout $p > 0$ et presque sûrement (en prenant $\varepsilon_n = 1/n$).

(b) $\lambda_n = n$: X_n converge vers 0 en probabilité, dans L^p pour tout $p > 0$ et presque sûrement (en prenant $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n}$; on montre que la série de terme général $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge en la comparant à l'intégrale de $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$).

(c) $\lambda_n = \log n$: X_n converge vers 0 en probabilité et dans L^p pour tout $p > 0$. Si les X_n sont indépendantes, on n'a pas convergence presque sûre.

Exercice 7.

1. On a
$$\mathbb{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = 2\int_\varepsilon^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_n^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\varepsilon/\sigma_n}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}y\;.$$
L'inégalité
$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}y \leqslant \int_a^\infty \frac{y}{a}\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-a^2/2}\;,$$
valable pour tout $a \geqslant 0$, permet de conclure.

2. Comme pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\mathrm{e}^{-\varepsilon^2/2\sigma_n^2}$ converge vers 0 si et seulement si σ_n converge vers 0, on a
$$X_n \to 0 \text{ en probabilité} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0\;.$$

3. Pour tout $p > 0$, on a
$$\mathbb{E}\big(|X_n|^p\big) = 2\int_0^\infty x^p\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_n^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\,\mathrm{d}x = 2\sigma_n^p\int_0^\infty y^p\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}y\;.$$
L'intégrale est convergente (c'est le moment d'ordre p d'une loi normale standard). Par conséquent,
$$X_n \to 0 \text{ dans } L^p \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0\;.$$

4. Même raisonnement qu'à l'exercice 6, en prenant $A_n = \{|X_n| > \varepsilon\}$.

5. Même raisonnement qu'à l'exercice 6, en prenant $A_n = \{|X_n| > 1\}$.

6. (a) $\sigma_n = 1/n$: X_n converge vers 0 en probabilité, dans L^p pour tout $p > 0$, et presque sûrement (on prend $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n}$).

   (b) $\sigma_n = 1/\sqrt{\log n}$: X_n converge vers 0 en probabilité et dans L^p pour tout $p > 0$. Comme pour tout $a > 1$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant 1\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_n^2}\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^a \mathrm{e}^{-a^2\log(n)/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(a-1)n^{-a^2/2}\;,\end{aligned}$$
on obtient une série divergente à condition que $a \leqslant \sqrt{2}$. Par conséquent, si les X_n sont indépendantes, il ne peut y avoir convergence presque sûre.