Leçon 241. Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples

Rappels de théorie

Notions de convergence d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles, définies sur un même intervalle I.

- On dit que la suite (f_n) *converge simplement* vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in I\ ,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

- On dit que la suite (f_n) *converge uniformément* vers f si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I\ ,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$$

  Cela revient à demander que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}\big|f_n(x) - f(x)\big|\right) = 0$$

Propriétés :

1. La convergence uniforme implique la convergence simple.
2. **Critère de Cauchy uniforme** : (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \geqslant N(\varepsilon)\colon \forall x \in I\ ,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon$$

3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues, convergeant uniformément vers une fonction f, alors f est continue.

Notions de convergence d'une série de fonctions

- On dit que la série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* (*uniformément*) vers une fonction S si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ converge simplement (uniformément) vers S.
- On dit que la série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement* vers S s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telle que $|f_n|$ soit majorée par u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la série de terme général u_n converge.

Propriétés :

- La convergence normale implique la convergence uniforme.
- La convergence uniforme implique la convergence simple.

Notions de convergence d'une suite de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une variable aléatoire réelle X_n sur cet espace.

- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi* vers une variable aléatoire réelle X si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$$

pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée.
Définition équivalente : si $F_n(t) = \mathbb{P}\{X_n \leqslant t\}$ est la fonction de répartition de X_n, et $F(t) = \mathbb{P}\{X \leqslant t\}$ est la fonction de répartition de X, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi* vers X si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t) \quad \forall t \text{ t.q. } F \text{ soit continue en } t$$

- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité* vers X si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big\{|X_n - X| > \varepsilon\big\} = 0$$

Propriétés :

- La convergence en probabilité implique la convergence en loi.
- **Loi faible des grands nombres** : Si les X_n sont non corrélées, de même loi et d'espérance μ et de variance finies, et $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, alors S_n/n converge en probabilité vers μ.
- **Théorème central limite** : Si les X_n sont indépendantes, de même loi, centrées et de variance finie σ^2, alors $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire normale, centrée, de variance σ^2.
- **Théorème de continuité de Paul Lévy** : Soit $\phi_n(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX_n})$ la fonction caractéristique de X_n et $\phi(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX})$ la fonction caractéristique de X. Alors X_n converge en loi vers X si et seulement si ϕ_n converge simplement vers ϕ sur $\mathbb{R}$.

Les deux notions suivantes ne sont pas au programme de l'agrégation interne, nous les mentionnons à titre d'information.

- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans L^p* vers X pour un $p > 0$ si $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|X^p|) < \infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|^p\big) = 0$$

- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement* vers X si

$$\mathbb{P}\Big(\big\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\big\}\Big) = 1$$

Propriétés :

- La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
- La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.
- Si X_n converge vers X presque sûrement et il existe une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E}(|Y^p|) < \infty$ et pour tout n, $|X_n| \leqslant Y$ presque sûrement, alors X_n converge vers X dans L^p.
- **Loi forte des grands nombres** : Si les X_n sont indépendantes, de même loi et d'espérance finie μ, alors X_n/n converge presque sûrement vers μ.

Lemme de Borel–Cantelli

Afin de montrer la convergence presque sûre, on se sert souvent du Lemme de Borel–Cantelli. On se donne une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors l'événement "$A_n$ est réalisé infiniment souvent" est noté

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{m\geqslant n} A_n$$

On a

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ \omega \in \bigcup_{m\geqslant n} A_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ \exists m \geqslant n \text{ tel que } \omega \in A_m \text{ et } A_m \neq \emptyset \end{aligned}$$

Lemme 1 (Borel–Cantelli)**.**
1. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$*, alors* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.
2. *Si les* A_n *sont indépendants et* $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$*, alors* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Exercices

Exercice 1. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur $I = (0,1]$, telles que f_n converge simplement vers 0 (la fonction identiquement nulle), mais telles que la convergence ne soit pas uniforme.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes:
1. $f_n(x) = f(nx)$;
2. $g_n(x) = \dfrac{1}{n} f(nx)$;
3. $h_n(x) = f(x/n)$;
4. $k_n(x) = \dfrac{1}{n} f(x/n)$.

Exercice 3. Pour $a, x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$, on définit

$$u_n(x, a) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^a}.$$

1. Pour quelles valeurs de x et de a la série de terme général $u_n(x, a)$ est-elle convergente?

   Lorsque la série converge, on pose

   $$f_a(x) = \sum_{n \geqslant 1} u_n(x, a).$$

2. Montrer que la série de terme général $u_n(x, 0)$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[\delta, \infty[$ pour un $\delta > 0$ et calculer sa somme $f_0(x)$.
3. Montrer que $f_1(x)$ est dérivable pour $x > 0$ et calculer sa dérivée. En déduire $f_1(x)$. Que se passe-t-il lorsque $x \searrow 0$?
4. Montrer que $f_2(x)$ est dérivable pour $x > 0$ et calculer sa dérivée. En déduire une représentation sous forme d'intégrale de $f_2(x)$. Que se passe-t-il lorsque $x \searrow 0$?

Exercice 4. Dans cet exercice, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace probabilisé défini par $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens sur $[0, 1]$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

1. Pour $p > 0$ on pose $X_n = n^{1/p} 1_{[0,1/n]}$. Dans quels sens X_n converge-t-elle vers 0 lorsque $n \to \infty$?
2. Tout $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une manière unique comme $n = 2^m + k$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k < 2^m$. On pose $X_n = 1_{[k2^{-m},(k+1)2^{-m}]}$. Dans quels sens X_n converge-t-elle vers 0 lorsque $n \to \infty$?

Exercice 5. Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si $\mathbb{P}\{X_n > 0\}$ tend vers 0.
2. Montrer que si la série $(\mathbb{P}\{X_n > 0\})_{n \geqslant 1}$ est convergente alors $X_n \to 0$ presque sûrement. Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie.
3. Montrer que si les X_n sont indépendantes, alors $X_n \to 0$ presque sûrement si et seulement si la série $(\mathbb{P}\{X_n > 0\})_{n \geqslant 1}$ est convergente.

   Indication: Utiliser la seconde partie du lemme de Borel–Cantelli.
4. On suppose que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Déterminer si X_n tend vers 0 dans L^1, en probabilité, presque sûrement, si $p_n = 1/n^2$, et si $p_n = 1/n$.
5. On suppose que X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ_n. Déterminer si X_n tend vers 0 dans L^1, en probabilité, presque sûrement, si $\lambda_n = 1/n$, et si $\lambda_n = 1/n^2$.

6. On suppose que la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}\{X_n = n^2\} = \alpha_n$ et $\mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - \alpha_n$. Déterminer si X_n tend vers 0 dans L^1, en probabilité, presque sûrement, si $\alpha_n = 1/n$, si $\alpha_n = 1/n^2$, et si $\alpha_n = 1/n^3$.

Exercice 6. Soient X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires exponentielles, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\mathbb{P}\{X_n > x\} = \mathrm{e}^{-\lambda_n x} \qquad \forall x \geqslant 0 \ .$$

1. Déterminer sous quelle condition sur les λ_n la suite des X_n converge vers 0 en probabilité lorsque $n \to \infty$.
2. Déterminer sous quelle condition sur les λ_n la suite des X_n converge vers 0 dans L^p lorsque $n \to \infty$.
3. Montrer que s'il existe une suite $\varepsilon_n \searrow 0$ telle que

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-\lambda_n \varepsilon_n} < +\infty \ ,$$

alors $X_n \to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$.

4. Montrer que si les X_n sont indépendantes et

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-\lambda_n} = +\infty \ ,$$

alors $X_n \not\to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$.

5. Déterminer dans quels sens X_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ pour $\lambda_n = n^2$, pour $\lambda_n = n$ et pour $\lambda_n = \log n$.

Exercice 7. Soient X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires normales, de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\{|X_n| > \varepsilon\} < \mathrm{e}^{-\varepsilon^2 / 2\sigma_n^2}$$

pour tout $\varepsilon > \sigma_n$.

2. Déterminer sous quelle condition sur les σ_n la suite des X_n converge vers 0 en probabilité lorsque $n \to \infty$.
3. Déterminer sous quelle condition sur les σ_n la suite des X_n converge vers 0 dans L^p lorsque $n \to \infty$.
4. Montrer que s'il existe une suite $\varepsilon_n \searrow 0$ telle que

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-\varepsilon_n^2 / 2\sigma_n^2} < +\infty \ ,$$

alors $X_n \to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$.

5. Montrer que si les X_n sont indépendantes et
$$\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-1/2\sigma_n^2} = +\infty \ ,$$
alors $X_n \not\to 0$ presque sûrement lorsque $n \to \infty$.
6. Déterminer dans quels sens X_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ pour $\sigma_n = 1/n$ et pour $\sigma_n = 1/\sqrt{\log n}$.