Série 4. Chaînes de Markov

Exercice 1. On considère la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le graphe de la chaîne associée.
2. Quelles sont les classes de la chaîne?
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.
4. Quels sont les états périodiques, apériodiques?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les classes de la chaîne, ses états récurrents, transients et absorbants.
2. Quelles sont les mesures invariantes de la chaîne?
3. Quelle est la probabilité que la chaîne issue de 2 soit absorbée en 4?
   On pourra chercher un système d'équations satisfait par les $\mathbb{P}_i\{X_\tau = 4\}$, pour tous les états i non absorbants.
4. Quel est le temps moyen jusqu'à absorption de la chaîne issue de 2?
   On pourra chercher des relations entre les $\mathbb{P}_i\{\tau = n\}$, et en déduire un système pour les $\mathbb{E}_i[\tau]$.

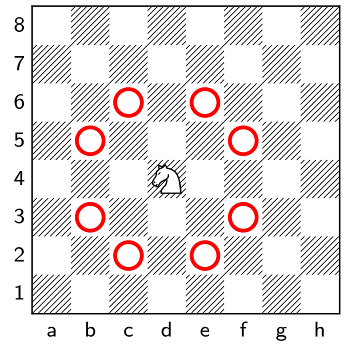
Exercice 3. Déterminer la mesure de probabilité invariante de la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

La chaîne est-elle réversible?

Exercice 4. Angèle possède 3 parapluies. Chaque jour, elle va au bureau le matin, et revient à son domicile le soir. Pour chaque trajet, elle emporte avec elle un parapluie s'il pleut, et s'il y en a au moins un sur place. Elle n'emporte pas de parapluie s'il ne pleut pas. On suppose que la probabilité qu'il pleuve au début de chaque trajet est de 1/3, et qu'elle est indépendante de la météo lors de tous les autres trajets. Soit X_n le nombre de parapluies qu'Angèle possède sur place avant de débuter le $n$ième trajet.

1. Montrer que $\{X_n\}_n$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
2. De quel type de chaîne s'agit-il?
3. Quelle est la probabilité, asymptotiquement au bout d'un grand nombre de voyages, qu'Angèle ne dispose pas de parapluie sur place au moment de partir?
4. Quelle est la probabilité asymptotique qu'elle se fasse mouiller bêtement, c'est-à-dire qu'elle n'ait pas de parapluie à sa disposition alors qu'il pleut dès son départ?



Exercice 5 (Le cavalier fou)**.** Un cavalier se déplace au hasard sur un échiquier. A chaque coup, il choisit de manière équiprobable l'une des cases qu'il a le droit d'atteindre selon les règles du jeu d'échec. On note X_n sa position au temps n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente et réversible.
2. Quelle est sa mesure de probabilité invariante?
3. Quel est le temps de récurrence moyen vers le coin inférieur gauche de l'échiquier?

Exercice 6. Soit $(V,\mathcal{E})$ un graphe fini, connexe, non orienté. On associe à chaque arête $e=(x,y)\in\mathcal{E}\subset V\times V$ un poids $w_{xy}=w_{yx}>0$, et l'on pose $w_x=\sum_{y\in V} w_{xy}$. Montrer que la chaîne de Markov sur V de probabilités de transition $P(x,y)=w_{xy}/w_x$ admet une mesure réversible et déterminer sa mesure de probabilité invariante.

Exercice 7 (Pagerank idéalisé)**.** Voici comment fonctionne une version simplifiée de l'algorithme de classement utilisé par Google. Soit G le graphe (fini) dont les sommets $s_1,\ldots,s_N$ sont les pages du web, et dont les arêtes (orientées) sont les hyperliens pointant d'une page vers une autres. On ajoute un sommet s_0 au graphe ainsi qu'une arête de chaque sommet de G vers s_0. On note $\hat{G}$ le graphe obtenu et A sa matrice d'adjacence définie par $A_{ij}=1$ s'il existe un lien de la page s_i vers la page s_j, et $A_{ij}=0$ sinon. Soit $N(i)$ le nombre d'arêtes sortant de s_i. Étant donné un paramètre $p\in]0,1[$, on définit une matrice Q sur $\hat{G}$ de la manière suivante:

- pour $0\leqslant i\leqslant N$, $Q(s_0,s_i)=1/(N+1)$,
- pour $1\leqslant i\neq j\leqslant N$, $Q(s_i,s_i)=0$ et

$$Q(s_i,s_0)=\begin{cases}1 & \text{si } N(i)=1,\\ 1-p & \text{sinon,}\end{cases} \quad \text{et} \quad Q(s_i,s_j)=\begin{cases}0 & \text{si } A_{ij}=0,\\ p/(N(i)-1) & \text{si } A_{ij}=1.\end{cases}$$

1. Ecrire les matrices A et Q du mini-web $1\to 2$, $1\to 3$, $3\to 2$, $2\to 3$, $4\to 5$, $5\to 4$ avec $p=1/2$.
2. Dans le cas général, montrer que Q est une matrice stochastique apériodique irréductible.
3. Interpréter l'évolution de la chaîne de Markov associée à Q.
4. Montrer que la chaîne admet une unique probabilité invariante π. L'algorithme Pagerank interprète $\pi(i)$ comme la popularité de la page s_i et ordonne les pages web à partir de cette donnée.
5. Comment peut-on estimer π en pratique?