Série 3. Chaînes de Markov en temps continu

Processus ponctuel de Poisson

Exercice 1. Des clients arrivent dans une banque suivant un processus de Poisson d'intensité λ. Sachant que deux clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que

1. les deux soient arrivés dans les 20 premières minutes?
2. l'un au moins soit arrivé dans les 20 premières minutes?

Exercice 2 (Le paradoxe de l'autobus)**.** Les temps d'arrivée d'autobus à un arrêt sont décrits par un processus de Poisson $(X_n)_n$ d'intensité λ. Un client arrive à l'instant t après le début du service.

1. Calculer la probabilité que le client rate le $n$ième bus mais attrape le $(n+1)$ième bus.
2. Calculer la probabilité qu'il rate le $n$ième bus et doive attendre le $(n+1)$ième bus pendant un temps s au moins.
3. Calculer la probabilité qu'il doive attendre le bus suivant pendant un temps s au moins.
4. En déduire le temps d'attente moyen, et comparer ce temps avec le temps de passage moyen entre bus. Qu'en pensez-vous?

Exercice 3. Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensités respectives λ et μ. Soit $(Z_n)_n$ le processus obtenu en superposant $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$. Montrer qu'il s'agit encore d'un processus de Poisson et donner son intensité.

Exercice 4. Soit X_n un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ.
Soit Y_n le processus obtenu en effaçant chaque X_n ($n \geqslant 1$) avec probabilité $1/2$, indépendamment de tous les autres, puis en renumérotant les points restants par les entiers positifs. On note N_t, respectivement M_t, le nombre de X_n, respectivement Y_n, dans l'intervalle $]0, t]$.

1. Donner la loi de N_t.
2. Montrer que pour tout k, $l \mapsto \mathbb{P}\{M_t = l | N_t = k\}$ suit une loi binomiale, et déterminer ses paramètres.
3. En déduire la loi de M_t.
4. Montrer que Y_n est un processus ponctuel de Poisson, et déterminer son intensité.
5. Que se passe-t-il si on efface chaque X_n avec probabilité $1-q$, $0 < q < 1$?

Chaînes de Markov en temps continu

Exercice 5. Un homme d'affaires voyage entre Paris, Bordeaux et Marseille. Il passe dans chaque ville un temps de loi exponentielle, de moyenne $1/4$ de mois pour Paris et Bordeaux, et de $1/5$ de mois pour Marseille. S'il est à Paris, il va à Bordeaux ou Marseille avec probabilité $1/2$. S'il est à Bordeaux, il va à Paris avec probabilité $3/4$ et à Marseille avec probabilité $1/4$. Après avoir visité Marseille, il retourne toujours à Paris.

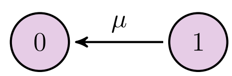
1. Donner le générateur du processus markovien de sauts décrivant l'itinéraire de l'homme d'affaires.
2. Déterminer la fraction de temps qu'il passe dans chaque ville.
3. Combien de voyages fait-il en moyenne de Paris à Bordeaux par année?

Exercice 6. Un petit magasin d'informatique peut avoir au plus trois ordinateurs en stock. Des clients arrivent avec un taux de 2 clients par semaine. Si au moins un ordinateur est en stock, le client l'achète. S'il reste au plus un ordinateur, le tenancier du magasin commande deux nouveaux ordinateurs, qui sont livrés après un temps de loi exponentielle de moyenne 1 semaine.

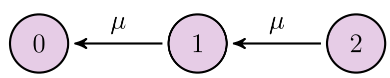
1. Donner le générateur du processus décrivant le nombre d'ordinateurs en stock.
2. Déterminer la distribution stationnaire.
3. Quel est le taux de vente d'ordinateurs?

Exercice 7. On modélise la désintégration radioactive de N atomes par un processus de sauts markovien $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ sur $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ de taux $q(n, n-1) = \mu$, X_t désignant le nombre d'atomes non désintégrés au temps t.

1. On considère le cas $N = 1$:



   Déterminer le générateur L. Calculer L^2, puis L^n pour tout n. En déduire le noyau de transition P_t.
2. On considère maintenant le cas $N = 2$:



   Déterminer le générateur L et écrire les équations de Kolmogorov progressives. Résoudre ces équations pour la condition initiale $X_0 = 2$, c'est-à-dire trouver $P_t(2, j)$ pour $j = 2, 1, 0$.
   Indication : La solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\mu x + f(t)$ s'écrit
$$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\, f(s)\,\mathrm{d}s\ .$$
3. Par le même procédé, calculer $P_t(N, j)$ pour $j = N, N-1, \dots, 0$ pour N quelconque.
4. Calculer
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(Y_t)$$
   où $Y_t = N - X_t$ est le nombre d'atomes désintégrés au temps t, s'il y a N atomes au temps 0.

Exercice 8. On considère une chaîne de mort pure, de taux de mort $q(n, n-1) = \mu$ pour tout $n \geqslant 1$. Déterminer les noyaux de transition $P_t(i, j)$.

Exercice 9. Considérons une flotte de N bus. Chaque véhicule tombe en panne indépendamment des autres avec un taux λ et est envoyé au dépôt. L'atelier ne peut en réparer qu'un à la fois et le travail est distribué selon une loi exponentielle de paramètre μ. Quelle est la mesure d'équilibre du nombre de bus en service ?

Exercice 10 (File M/M/∞)**.** On considère un processus de naissance et de mort de paramètres $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu n$: les clients arrivent aux temps de saut d'un processus de Poisson d'intensité λ et une infinité de caisses servent chacune indépendamment un client après un temps exponentiel de paramètre μ.

Notons $\nu_{k,t}$ la loi de X_t sachant que $X_0 = k$, c'est-à-dire que pour $k \in \mathbb{N}$ et $t > 0$,

$$\forall i \in \mathbb{N}\ , \qquad \nu_{k,t}(i) = \mathbb{P}\{X_t = i | X_0 = k\}\ .$$

On rappelle deux définitions de la distance en variation totale entre deux mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$:

$$d_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\big|\mu(\{k\}) - \nu(\{k\})\big| = \inf\big\{\mathbb{P}\{X \neq Y\} \colon X \sim \mu, Y \sim \nu\big\}\ .$$

1. Montrer que la file est toujours stable et que sa mesure invariante est une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2. Soit $k > l$. Montrer que $\nu_{k,t} = \nu_{l,t} * \mathcal{B}(k-l, \mathrm{e}^{-\mu t})$, où $*$ désigne le produit de convolution. Comment interpréter cette relation en terme de file d'attente ? En déduire que $d_{\mathrm{VT}}(\nu_{k,t}, \nu_{l,t}) \leqslant (k-l)\,\mathrm{e}^{-\mu t}$.

Exercice 11 (File M/M/1)**.** Notons L la transformée de Laplace du temps d'atteinte de l'état k partant de l'état $k+1$:

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad L(s) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{sT_k}\, | X_0 = k+1)$$

où $T_k = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \colon X_t = k\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité et l'expression de la mesure invariante.
2. Pourquoi L ne dépend-elle pas de k ? Montrer que

$$L(s) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-s}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L(s)^2\right)_; .$$

   En déduire l'expression de L.