# Série 2. Espérances conditionnelles, martingales

## Espérances conditionnelles

**Exercice 1.** Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de $1$ à $4$, on considère les variables aléatoires $X$, égale à la somme des points, et $Y$, égale à leur différence (en valeur absolue).

1. Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience.
2. Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$ ainsi que leurs espérances.
3. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et $\mathbb{E}(Y|X)$.

**Exercice 2.** On jette un dé symétrique, puis on jette une pièce de monnaie autant de fois que le dé indique de points. Soit $X$ le nombre de Pile obtenus. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

**Exercice 3.** Soient $X, Y$ des variables aléatoires réelles intégrables telles que $XY$ soit également intégrable.

1. Montrer les implications :
   $X, Y$ indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
   *Indication :* Commencer par considérer des fonctions indicatrices.
2. Donner des contre-exemples aux implications inverses.
   *Indication :* On pourra considérer un cas où $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$, et exprimer les différentes égalités en fonction de la loi conjointe, donnée par l'application $(x, y) \mapsto p_{xy} = \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$.

**Exercice 4.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ des sous-tribus de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)]^2\big) + \mathbb{E}\big([\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2\big) = \mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)]^2\big)$$
2. On pose $\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_1) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)^2$. Montrer que
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big(\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}_1)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)\big) \ .$$
3. Soit $Y_1, Y_2, \dots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$. Soit $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de tous les $Y_i$. Soit finalement $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$. Montrer que
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \mathbb{E}(N) + \mu^2 \,\mathrm{Var}(N) \ .$$
4. Déterminer la variance de la variable aléatoire $X$ de l'exercice 2.

**Exercice 5.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in L^2(\mathbb{P})$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1})$. Montrer que
$$\mathrm{Var}\bigg(\sum_{i=0}^{n} X_i\bigg) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \ .$$

**Exercice 6** (Le processus ponctuel de Poisson)**.** Un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ peut être défini comme une suite de variables aléatoires $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ telles que

i. $N_0 = 0$;
ii. pour $t > s \geqslant 0$, $N_t - N_s$ est indépendant de $N_s$;
iii. pour $t > s \geqslant 0$, $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$:

$$\mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} , \qquad k \in \mathbb{N} .$$

On se donne des variables aléatoires i.i.d. $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de carré intégrables, indépendantes de $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$. Soit

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k .$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
2. Calculer $\mathrm{Var}(X_t)$.

## Martingales

**Exercice 7.** Soient $Y_1, Y_2, \dots$ des variables i.i.d., et soit $X_n = \prod_{m=1}^n Y_m$. Sous quelle condition la suite $X_n$ est-elle une surmartingale? Une sous-martingale? Une martingale?

**Exercice 8** (Urne de Polya)**.** On considère une urne contenant $r$ boules rouges et $v$ boules vertes. De manière répétée, on tire une boule de l'urne, puis on la remet en ajoutant un nombre fixé $c$ de boules de la même couleur.

1. Déterminer la loi de la proportion de boules vertes $X_n$ dans le cas $r = v = c = 1$.
2. Dans le cas général, exprimer le processus croissant $\langle X\rangle_n$ en fonction des $X_m$ et du nombre total de boules $N_m$ aux temps $m \leqslant n$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\langle X\rangle_n < \infty$.

**Exercice 9** (La ruine du joueur)**.** Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on considère une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$, où $p = 1 - q \in ]0,1[$. On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ une constante, correspondant à la fortune initiale d'un joueur. Sa fortune au temps $n$ est donnée par la variable aléatoire

$$X_n = k + \sum_{i=1}^n Y_i .$$

On considére que le joueur s'arrête la première fois que soit sa fortune atteint un objectif $M > k$, soit il est ruiné. Le nombre de parties qu'il joue est donc donné par le temps d'arrêt

$$T = \inf\bigl\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, M\}\bigr\} .$$

1. On pose $\rho = q/p = (1-p)/p$. Montrer que les trois processus suivants sont des $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingales:
$$A_n = X_n - (p-q)n\ , \qquad B_n = A_n^2 - 4pqn\ , \qquad C_n = \rho^{X_n}\ .$$
2. Montrer que $T$ est bien un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour $p = q = 1/2$, utiliser la martingale $(B_n = X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir que, pour tout $n$,
$$\mathbb{E}(X_{T\wedge n}^2) = k^2 + \mathbb{E}(T\wedge n)\ .$$
En déduire que $\mathbb{E}(T) < +\infty$, donc que $T$ est presque sûrement fini.
4. Toujours pour $p = q = 1/2$, utiliser la martingale $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour démontrer que
$$\mathbb{P}\{X_T = 0\} = \frac{M-k}{M} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X_T) = k\ .$$
En réutilisant $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que
$$\mathbb{E}(T) = k(M-k)\ .$$
5. Pour $p \neq q$, utiliser la martingale $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) = k + (p-q)\mathbb{E}(T\wedge n)\ .$$
En déduire que $\mathbb{E}(T) < +\infty$, donc que $T$ est presque sûrement fini.
6. Toujours pour $p \neq q$, utiliser la martingale $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour démontrer que
$$\mathbb{P}\{X_T = 0\} = \frac{\rho^k - \rho^M}{1-\rho^M} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X_T) = M\frac{1-\rho^k}{1-\rho^M}\ .$$
En réutilisant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que
$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}\frac{M(1-\rho^k) - k(1-\rho^M)}{1-\rho^M}\ .$$
7. Pourquoi les arguments des deux dernières questions ne fonctionnent-ils pas dans le cas $p = q = 1/2$ ?

**Exercice 10** (Le processus de Galton–Watson)**.** On se donne des variables aléatoires i.i.d. $\{\xi_{n,i}\}_{n,i\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note leur distribution $p_k = \mathbb{P}\{\xi_{n,i} = k\}$, leur espérance $\mu > 0$ et leur variance $\sigma^2$. On notera $\mathcal{F}_n$ la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_{m,i}, m \leqslant n\}$. On définit un processus $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ par $Z_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$
$$Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_{1,n+1} + \dots + \xi_{Z_n,n+1} & \text{si } Z_n > 0\ , \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$
Ce processus modélise l'évolution d'une population avec initialement $Z_0 = 1$ individu, et dans laquelle chaque individu $i$ donne naissance au temps $n$ à un nombre aléatoire $\xi_{n,i}$ d'enfants, indépendamment et avec la même loi que tous les autres individus.

1. Montrer que $X_n = Z_n/\mu^n$ et $M_n = \sum_{i=1}^n (Z_i - \mu Z_{i-1})$ sont des martingales par rapport à $\mathcal{F}_n$.

2. En déduire que la suite $X_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $X_\infty$ intégrable.
3. Montrer que si $\mu < 1$, alors $\mathbb{P}\{Z_n = 0\} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, et donc $X_n \to 0$ presque sûrement.
4. On suppose $\mu > 1$. Soit $\varphi(s) = \mathbb{E}(s^{\xi_{i,n}}) = \sum_{k=0}^\infty p_k s^k$ la fonction génératrice de la distribution d'enfants.
   (a) Montrer que $\varphi$ est croissante et convexe sur $[0,1]$.
   (b) Soit $\theta_m = \mathbb{P}\{Z_m = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}\{Z_m = 0 | Z_1 = k\} = \theta_{m-1}^k$ et en déduire que $\theta_m = \varphi(\theta_{m-1})$.
   (c) Montrer que $\varphi$ admet un unique point fixe $\rho$ sur $[0,1)$.
   (d) Montrer que $\theta_m \nearrow \rho$ lorsque $m \to \infty$.

   En déduire que $\mathbb{P}\{Z_n > 0 \; \forall n\} = 1 - \rho > 0$.
5. *Application numérique:* Galton et Watson ont introduit leur modèle afin de décrire la survie de noms de famille. Au XVIIIe siècle, ces noms n'étaient transmis que par les enfants de sexe masculin. On suppose que chaque famille a trois enfants, dont le sexe est déterminé par une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Le nombre de descendants mâles est donc décrit par un processus de Galton–Watson de loi binomiale $p_0 = p_3 = 1/8$, $p_1 = p_2 = 3/8$. Déterminer la probabilité de survie du nom de famille.
6. Montrer que si $\mu \leqslant 1$, $X_n$ ne converge pas vers $X_\infty$ dans $L^1$.
7. Si $\mu > 1$, déterminer le processus croissant $\langle X \rangle_n$ de $X_n$. Calculer $\langle X \rangle_\infty$ puis $\mathbb{E}(\langle X \rangle_\infty)$.
8. En déduire que si $\mu > 1$, $X_n$ converge vers $X_\infty$ dans $L^2$ et dans $L^1$, et que $\mathbb{E}(X_\infty) = 1$.
9. Vérifier que pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle M \rangle_n = \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$.
10. Si $\mu > 1$, montrer à l'aide du lemme de Toeplitz (rappelé ci-dessous) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{\mu^n} = \frac{\sigma^2}{\mu - 1} X_\infty \quad \text{p.s.}$$

    En déduire que $\{X_\infty > 0\} \subset \{\langle M \rangle_\infty = +\infty\}$.
11. On pose

$$\hat{\mu}_n = \frac{\sum_{k=1}^n Z_k}{\sum_{k=1}^n Z_{k-1}} \; .$$

    Montrer que $\hat{\mu}_n - \mu = \sigma^2 M_n / \langle M \rangle_n$.
12. Appliquer la loi des grands nombres pour les martingales afin d'en déduire que pour $\mu > 1$ et sur $\{X_\infty > 0\}$, $\hat{\mu}_n$ converge presque sûrement vers $\mu$ ($\hat{\mu}_n$ est un estimateur consistant de $\mu$, en restriction à un événement de probabilité strictement positive).

**Lemme 1** (de Toeplitz)**.** *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = +\infty$, et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k x_k}{\sum_{k=1}^n a_k} = \ell \; .$$