Série 2. Simulation de variables aléatoires

Rappels de théorie

Proposition 1. *Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et*

$$F^{-}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geqslant y\} ,$$

alors $F^{-}(U)$ admet F comme fonction de répartition.

Proposition 2. *Si la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X est continue, alors $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.*

Exercices

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer une fonction $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $G(U)$ admette les lois suivantes:

1. Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Loi de Cauchy, de densité $1/(\pi(1+x^2))$.
3. Loi de Rayleigh, de densité $x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,1_{\{x>0\}}$.
4. Loi de Pareto de densité $\alpha x^{-\alpha-1} 1_{\{x>1\}}$, $\alpha > 0$.

Exercice 2. Soit $\mu = p_1\delta_1 + \cdots + p_k\delta_k$ une loi de probabilité sur $\{1,\ldots,k\}$. Montrer que la variable aléatoire

$$X = 1_{\{U<p_1\}} + 2 1_{\{p_1 \leqslant U < p_1+p_2\}} + \cdots + k 1_{\{p_1+\cdots+p_{k-1} \leqslant U < 1\}}$$

a pour loi μ si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, quelle est la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ de X? En déduire un algorithme permettant de simuler une variable de loi géométrique à partir d'une variable U de loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 4. Soit $(T_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} T_j .$$

Enfin, on définit

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leqslant 1\}} .$$

1. Quelle est la loi de S_n? Donner sa densité.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\{S_n \leqslant 1\} = \{N \geqslant n\}$.
3. Calculer $\mathbb{P}\{N = n\}$ pour tout $n \geqslant 0$. Quelle est la loi de N?

Exercice 5. Soit $\mathcal{B}_d(0,1)$ la boule unité dans $\mathbb{R}^d$ (pour la norme euclidienne). On note V_d son volume.

1. Proposer un algorithme fournissant une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathcal{B}_d(0,1)$ à partir d'une suite i.i.d. de variables uniformes sur $[-1,1]$.
2. Soit N le nombre d'itérations nécessaires pour simuler une telle variable. Quelle est l'espérance de N? Quelle est sa loi?
3. Dans le cas $d=2$, proposer un algorithme permettant d'estimer π.
4. A partir de l'algorithme du point 1., construire un algorithme simulant une variable aléatoire de loi uniforme sur la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$.
5. Soient $Y_1,\dots,Y_d$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la loi de $Y = (Y_1,\dots,Y_d)$ est invariante par rotation (Y et OY ont même loi pour toute matrice orthogonale O). En déduire la loi de $Y/\|Y_2\|$.

Exercice 6 (Algorithme de Box–Müller)**.** Montrer que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre $1/2$ et uniforme sur $[0,1]$, alors

$$X = \sqrt{U}\cos(2\pi V)\ ,$$
$$Y = \sqrt{U}\sin(2\pi V)$$

sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 7 (Algorithme polaire-rejet)**.** Soient $((U_n,V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables i.i.d. de loi uniforme sur $[-1,1]$. On note $T=\inf\{n\geqslant 1\colon U_n^2+V_n^2\leqslant 1\}$ et $R^2=U_T^2+V_T^2$. Montrer que les variables aléatoires

$$X = \sqrt{-2\log(R^2)/R^2}\,U_T\ ,$$
$$Y = \sqrt{-2\log(R^2)/R^2}\,V_T$$

sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 8 (Decomposition de Cholesky)**.** Soit $X=(X_1,\dots,X_d)$ un vecteur Gaussien et Γ sa matrice de covariance.

1. Montrer que Γ est symétrique, (semi-définie) positive.
2. Quelle contrainte sur les coefficients de Γ suit de l'inégalité de Cauchy–Schwarz?
3. Montrer que toute matrice Γ symétrique (semi-définie) positive peut s'écrire sous la forme $\Gamma = AA^T$ avec A triangulaire inférieure. Montrer que A est inversible si et seulement si Γ est définie positive.
4. Soit Y un vecteur Gaussien de matrice de covariance I_d (matrice identité de taille d). Quelle est la loi de $AY+m$?

Exercice 9. On observe une suite de variables aléatoire i.i.d. $X_1,\dots,X_n$ de loi

$$p\mathcal{N}(a,1)+(1-p)\mathcal{N}(-a,1)$$

avec $a>0$ et $0<p<1$.

1. Esquisser la densité de X_1.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_1^2)$.
3. Proposer une méthode permettant d'estimer ces deux moments à partir de $X_1,\dots,X_n$ et en déduire des estimateurs des paramètres a et p.