

Série 2. Simulation de variables aléatoires

Rappels de théorie

Proposition 1. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et

$$F^-(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\},$$

alors $F^-(U)$ admet F comme fonction de répartition.

Proposition 2. Si la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X est continue, alors $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercices

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer une fonction $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $G(U)$ admette les lois suivantes:

1. Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Loi de Cauchy, de densité $1/(\pi(1+x^2))$.
3. Loi de Rayleigh, de densité $x e^{-x^2/2} 1_{\{x>0\}}$.
4. Loi de Pareto de densité $\alpha x^{-\alpha-1} 1_{\{x>1\}}$, $\alpha > 0$.

Exercice 2. Soit $\mu = p_1\delta_1 + \dots + p_k\delta_k$ une loi de probabilité sur $\{1, \dots, k\}$. Montrer que la variable aléatoire

$$X = 1_{\{U < p_1\}} + 2 1_{\{p_1 \leq U < p_1 + p_2\}} + \dots + k 1_{\{p_1 + \dots + p_{k-1} \leq U < 1\}}$$

a pour loi μ si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , quelle est la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ de X ? En déduire un algorithme permettant de simuler une variable de loi géométrique à partir d'une variable U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 4. Soit $(T_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{j=1}^n T_j.$$

Enfin, on définit

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq 1\}}.$$

1. Quelle est la loi de S_n ? Donner sa densité.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\{S_n \leq 1\} = \{N \geq n\}$.
3. Calculer $\mathbb{P}\{N = n\}$ pour tout $n \geq 0$. Quelle est la loi de N ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{B}_d(0, 1)$ la boule unité dans \mathbb{R}^d (pour la norme euclidienne). On note V_d son volume.

1. Proposer un algorithme fournissant une variable aléatoire de loi uniforme sur \mathbb{R}^d à partir d'une suite i.i.d. de variables uniformes sur $[-1, 1]$.
2. Soit N le nombre d'itérations nécessaires pour simuler une telle variable. Quelle est l'espérance de N ? Quelle est sa loi?
3. Dans le cas $d = 2$, proposer un algorithme permettant d'estimer π .
4. A partir de l'algorithme du point 1., construire un algorithme simulant une variable aléatoire de loi uniforme sur la sphère unité dans \mathbb{R}^d .
5. Soient Y_1, \dots, Y_d des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la loi de $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ est invariante par rotation (Y et OY ont même loi pour toute matrice orthogonale O). En déduire la loi de $Y/\|Y\|$.

Exercice 6 (Algorithme de Box–Müller). Montrer que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre $1/2$ et uniforme sur $[0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{U} \cos(2\pi V), \\ Y &= \sqrt{U} \sin(2\pi V) \end{aligned}$$

sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 7 (Algorithme polaire-rejet). Soient $((U_n, V_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables i.i.d. de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On note $T = \inf\{n \geq 1 : U_n^2 + V_n^2 \leq 1\}$ et $R^2 = U_T^2 + V_T^2$. Montrer que les variables aléatoires

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \log(R^2)/R^2} U_T, \\ Y &= \sqrt{-2 \log(R^2)/R^2} V_T \end{aligned}$$

sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 8 (Decomposition de Cholesky). Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur Gaussien et Γ sa matrice de covariance.

1. Montrer que Γ est symétrique, (semi-définie) positive.
2. Quelle contrainte sur les coefficients de Γ suit de l'inégalité de Cauchy–Schwarz?
3. Montrer que toute matrice Γ symétrique (semi-définie) positive peut s'écrire sous la forme $\Gamma = AA^T$ avec A triangulaire inférieure. Montrer que A est inversible si et seulement si Γ est définie positive.
4. Soit Y un vecteur Gaussien de matrice de covariance I_d (matrice identité de taille d). Quelle est la loi de $AY + m$?

Exercice 9. On observe une suite de variables aléatoire i.i.d. X_1, \dots, X_n de loi

$$p\mathcal{N}(a, 1) + (1 - p)\mathcal{N}(-a, 1)$$

avec $a > 0$ et $0 < p < 1$.

1. Esquisser la densité de X_1 .
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_1^2)$.
3. Proposer une méthode permettant d'estimer ces deux moments à partir de X_1, \dots, X_n et en déduire des estimateurs des paramètres a et p .