Série 1. Fonction génératrice, fonction caractéristique et transformée de Laplace

Rappels de théorie

Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X la fonction $G_X : \mathbb{C} \supset \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$G_X(z) = \mathbb{E}\big(z^X\big) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbb{P}\{X = k\} \; .$$

Transformée de Laplace

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *transformée de Laplace* de X la fonction $L_X : \mathbb{R} \supset \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_X(t) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \; .$$

Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction caractéristique* de X la fonction $\phi_X : \mathbb{C} \supset \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}\big) \; .$$

Exercices

Exercice 1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes:

1. Loi de Bernoulli: $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - q$, $\mathbb{P}\{X = 1\} = q$, où $q \in [0, 1]$.
2. Loi binomiale: $\mathbb{P}\{X = k\} = b_{n,q}(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$, pour $k = 0, 1, \dots, n$.
3. Loi de Poisson: $\mathbb{P}\{X = k\} = \pi_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k / k!$, où $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.
4. Loi géométrique: $\mathbb{P}\{X = k\} = q(1-q)^{k-1}$, où $q \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. On suppose que la série entière définissant G_X a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Montrer que

$$G_X(1) = 1 \; , \qquad G'_X(1) = \mathbb{E}(X) \; , \qquad G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \; ,$$

et en déduire une expression de la variance de X en termes de sa fonction génératrice. En déduire les espérances et variances de variables aléatoires de Bernoulli, binomiale, de Poisson et géométrique.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et de fonctions génératrices G_X et G_Y respectivement. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application: Vérifier les assertions suivantes.

1. La somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes suit une loi binomiale;
2. La somme de deux variables aléatoires binomiales indépendantes de même paramètre q suit une loi binomiale;

3. La somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit une loi de Poisson.

Exercice 4. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $G_N(z) = \mathbb{E}(z^N)$ sa fonction génératrice. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes de N. Soit $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$ leur fonction génératrice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$S_n = X_1 + \dots + X_n \ .$$
Ecrire la fonction génératrice $\mathbb{E}(z^{S_n})$ de S_n en fonction de $G_X(z)$.
2. Soit
$$S_N = X_1 + \dots + X_N \ .$$
Montrer que sa fonction génératrice $G_S(z) = \mathbb{E}(z^{S_N})$ est donnée par
$$G_S(z) = G_N(G_X(z)) \ .$$
Indication: Ecrire $\mathbb{P}\{S_N = k\}$ en fonction des $\mathbb{P}\{S_N = k | N = n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et que les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre $q \in [0, 1]$. Déterminer la loi de S_N.

Exercice 5. Calculer les transformées de Laplace des lois suivantes en précisant leurs domaines de définition:

1. Loi de Bernoulli de paramètre q. Quel est son lien avec la fonction génératrice?
2. Loi de Poisson de paramètre λ.
3. Loi exponentielle de paramètre λ.
4. Loi normale de moyenne μ et variance σ^2.
5. Loi Gamma de paramètres n et λ (on rappelle sa densité: $\Gamma(n)^{-1} \lambda^n x^{n-1} \,\mathrm{e}^{-\lambda x} \,\mathbb{1}_{\{x>0\}}$).

Exercice 6. Soit $L_X(t)$ la transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle X et $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

1. Montrer que $t \mapsto L_X(t)$ est une fonction convexe.
2. Le domaine de définition $\mathcal{D}$ peut-il être réduit à $\{0\}$?
3. Montrer que $t \mapsto L_X(t)$ est une fonction log-convexe (son logarithme est une fonction convexe).

Exercice 7.

1. Soit X une variable aléatoire réelle admettant la densité f. Exprimer sa fonction caractéristique $\phi_X(t)$ en fonction de f, et en fonction des moments $\mathbb{E}(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$, si ceux-ci existent. Que valent $\phi_X(0)$, $\phi'_X(0)$ et $\phi''_X(0)$?
2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Calculer sa fonction caractéristique $\Phi_X(t)$. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geqslant 1$.
3. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Calculer sa fonction caractéristique $\Phi_X(t)$. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geqslant 1$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi normale. On note μ_1, μ_2 leurs moyennes et σ_1^2, σ_2^2 leurs variances. Calculer la fonction caractéristique de $X_1 + X_2$. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?
5. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy à l'aide de la méthode des résidus. Que peut-on en déduire?