

Série 1. Fonction génératrice, fonction caractéristique et transformée de Laplace

Rappels de théorie

Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle *fonction génératrice* de X la fonction $G_X : \mathbb{C} \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}\{X = k\} .$$

Transformée de Laplace

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *transformée de Laplace* de X la fonction $L_X : \mathbb{R} \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) .$$

Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction caractéristique* de X la fonction $\phi_X : \mathbb{C} \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) .$$

Exercices

Exercice 1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes:

1. Loi de Bernoulli: $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - q$, $\mathbb{P}\{X = 1\} = q$, où $q \in [0, 1]$.
2. Loi binomiale: $\mathbb{P}\{X = k\} = b_{n,q}(k) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}$, pour $k = 0, 1, \dots, n$.
3. Loi de Poisson: $\mathbb{P}\{X = k\} = \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, où $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.
4. Loi géométrique: $\mathbb{P}\{X = k\} = q(1 - q)^{k-1}$, où $q \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. On suppose que la série entière définissant G_X a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Montrer que

$$G_X(1) = 1, \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X), \quad G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X),$$

et en déduire une expression de la variance de X en termes de sa fonction génératrice. En déduire les espérances et variances de variables aléatoires de Bernoulli, binomiale, de Poisson et géométrique.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , et de fonctions génératrices G_X et G_Y respectivement. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application: Vérifier les assertions suivantes.

1. La somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes suit une loi binomiale;
2. La somme de deux variables aléatoires binomiales indépendantes de même paramètre q suit une loi binomiale;
3. La somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit une loi de Poisson.

Exercice 4. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , et soit $G_N(z) = \mathbb{E}(z^N)$ sa fonction génératrice. Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes de N . Soit $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$ leur fonction génératrice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$S_n = X_1 + \dots + X_n .$$

Ecrire la fonction génératrice $\mathbb{E}(z^{S_n})$ de S_n en fonction de $G_X(z)$.

2. Soit

$$S_N = X_1 + \dots + X_N .$$

Montrer que sa fonction génératrice $G_S(z) = \mathbb{E}(z^{S_N})$ est donnée par

$$G_S(z) = G_N(G_X(z)) .$$

Indication: Ecrire $\mathbb{P}\{S_N = k\}$ en fonction des $\mathbb{P}\{S_N = k | N = n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et que les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre $q \in [0, 1]$. Déterminer la loi de S_N .

Exercice 5. Calculer les transformées de Laplace des lois suivantes en précisant leurs domaines de définition:

1. Loi de Bernoulli de paramètre q . Quel est son lien avec la fonction génératrice?
2. Loi de Poisson de paramètre λ .
3. Loi exponentielle de paramètre λ .
4. Loi normale de moyenne μ et variance σ^2 .
5. Loi Gamma de paramètres n et λ (on rappelle sa densité: $\Gamma(n)^{-1} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$).

Exercice 6. Soit $L_X(t)$ la transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle X et \mathcal{D} son domaine de définition.

1. Montrer que $t \mapsto L_X(t)$ est une fonction convexe.
2. Le domaine de définition \mathcal{D} peut-il être réduit à $\{0\}$?
3. Montrer que $t \mapsto L_X(t)$ est une fonction log-convexe (son logarithme est une fonction convexe).

Exercice 7.

1. Soit X une variable aléatoire réelle admettant la densité f . Exprimer sa fonction caractéristique $\phi_X(t)$ en fonction de f , et en fonction des moments $\mathbb{E}(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$, si ceux-ci existent. Que valent $\phi_X(0)$, $\phi'_X(0)$ et $\phi''_X(0)$?
2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ . Calculer sa fonction caractéristique $\Phi_X(t)$. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geq 1$.
3. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Calculer sa fonction caractéristique $\Phi_X(t)$. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geq 1$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi normale. On note μ_1, μ_2 leurs moyennes et σ_1^2, σ_2^2 leurs variances. Calculer la fonction caractéristique de $X_1 + X_2$. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?
5. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy à l'aide de la méthode des résidus. Que peut-on en déduire?