Leçon 453 : Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistique.

On rappelle que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$ si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, \ldots, n$$

où

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

désigne les coefficients binomiaux. On écrira $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Si $X \sim \mathscr{B}(1,p)$, on dit aussi que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
$X \sim \mathscr{B}(n,p)$ représente le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli de longueur n et de probabilité de succès p.

Exercices

Exercice 1 (Espérance et variance)**.**

1. Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toutes de loi $\mathscr{B}(1,p)$, alors leur somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
3. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

Exercice 2 (Surbooking. Source : `http://exo7.emath.fr/`)**.**
Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire « nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20 ». Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 3 (Convergence vers la loi de Poisson)**.**
On se donne $\lambda > 0$ et une suite $(p_n)_{n \geqslant 1}$ à valeurs dans $[0,1]$, telle que

$$\lim_{n \to \infty} n p_n = \lambda$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p_n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big\{X_n = k\big\} = \frac{\lambda^k}{k!} \, \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Exercice 4 (QCM. Source : http://exo7.emath.fr/)**.**
Un candidat se présente à un concours où 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi et son espérance.

Exercice 5 (Source : http://isa.gache.free.fr/)**.**
Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés. On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
3. Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 6 (Intervalle de confiance)**.**
Afin de déterminer l'opinion de la population française sur une certaine question, on effectue un sondage sur $n = 1000$ personnes. Il s'avère que 450 personnes ont l'opinion A, alors que les 550 autres personnes ont l'opinion B. On estime donc la proportion d'opinions A dans la population à 45%. Pour simplifier nous modélisons le sondage par un tirage avec remise (le tirage sans remise serait modélisé par une loi hypergéométrique).

1. Si p est la probabilité d'avoir l'opinion A, quelle est la loi du nombre X_n de personnes ayant cette opinion ?
2. Soit $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Que peut-on dire de la variable dite pivotale
$$\hat{X}_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$
en particulier lorsque n est grand ?
3. On admet que la loi de $\hat{X}_n$ est proche de celle de
$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}$$
En déduire un intervalle I, centré en $\overline{X}_n$, qui contient p avec une probabilité de 95% approximativement.