Leçon 451 : Applications des transformées de Laplace et de Fourier

La *transformée de Laplace* d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux est définie par

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.
La *transformée de Fourier* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux est définie par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.

Exercices

Exercice 1 (Transformée de Laplace et équations différentielles)**.**
L'objectif est de résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0\ , \qquad y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 2\ .$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Déterminer le domaine de définition et la valeur de $(\mathcal{L}f)(s)$.
2. Soit $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer la transformée de Laplace de $y'(x)$, sous une condition de croissance sur $y(x)$ que l'on précisera.
3. Même question pour la transformée de Laplace de $y''(x)$.
4. Trouver une équation algébrique satisfaite par $Y(s)$ si $y(x)$ satisfait l'équation différentielle ci-dessus.
5. Décomposer $Y(s)$ en fractions simples. En déduire $y(x)$ à l'aide de la question 1, et vérifier que les conditions de croissance sont satisfaites pour des s adéquats.

Exercice 2 (Transformée de Laplace et moments de la loi exponentielle)**.**
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer le domaine de définition et calculer la valeur de $L(s) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{sX})$.
2. Montrer que $L(s)$ admet un développement en série entière autour de $s = 0$ et donner son rayon de convergence.
3. Exprimer $L(s)$ en fonction des moments $\mathbb{E}(X^n)$ de X, et en déduire la valeur de ces moments.

Exercice 3 (Transformée de Fourier et moments de la loi normale)**.**
Soit X une variable aléatoire de loi normale standard (centée et réduite).

1. Montrer que $\mathbb{E}(\sin(sX)) = 0$.
2. Soit $g(s) = \mathbb{E}(\cos(sX))$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que g satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résoudra.
3. En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,sX})$, et remarquer qu'il s'agit de la transformée de Fourier d'une fonction que l'on précisera.
4. Exprimer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,sX})$ en fonction des moments $\mathbb{E}(X^n)$ de X, et en déduire une expression pour ces moments.

Exercice 4 (Transformée de Fourier et équation de la chaleur)**.**
L'objectif est de résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 0 \;, \qquad u(0,x) = u_0(x) \;.$$

1. En admettant leur existence, exprimer les transformées de Fourier de $\partial u/\partial x$ et $\partial^2 u/\partial x^2$ en fonction de $\hat{u}(\xi,t) = (\mathcal{F}u)(\xi,t)$.
2. En déduire une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre pour $t \mapsto \hat{u}(\xi,t)$. Exprimer sa solution en fonction de $\hat{u}(\xi,0)$.
3. En déduire que la solution de l'équation de la chaleur peut s'écrire sous la forme

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2/(4t)}\, u_0(y)\,\mathrm{d}y \;.$$