Leçon 438 : Dénombrement et combinatoire. Complément

Nombre de permutations sans point fixe

Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Il existe exactement $n!$ bijections de E dans lui-même, ce sont les permutations de E. Notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de ces permutations. On souhaite montrer que le nombre de permutations *sans point fixe* de E (aussi appelées *dérangements* de E) est égal à

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} .$$

Pour $i \in E$, notons

$$S_i = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \colon \sigma(i) = i\big\}$$

l'ensemble des permutations fixant i. L'ensemble

$$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$$

est l'ensemble des permutations fixant au moins un élément de E. Si nous écrivons $|A|$ pour le cardinal d'un ensemble fini A, nous avons donc

$$D_n = |\mathfrak{S}_N| - \big|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\big| = n! - \big|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\big| .$$

Nous allons nous servir du résultat suivant.

Proposition 1 (Principe d'inclusion–exclusion)**.** *Soient $S_1, \ldots S_n$ des sous-ensembles finis d'un même ensemble $\mathcal{E}$. Alors*

$$\begin{aligned}\big|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\big| = \sum_{i=1}^{n} \big|S_i\big| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big|S_i \cap S_j\big| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \big|S_i \cap S_j \cap S_k\big| - \ldots \\ + (-1)^{n+1} \big|S_1 \cap \cdots \cap S_n\big| .\end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. L'initialisation est faite pour $n = 2$, où l'affirmation se réduit à la relation bien connue

$$\big|S_1 \cup S_2\big| = \big|S_1\big| + \big|S_2\big| - \big|S_1 \cap S_2\big| .$$

L'hérédité est basée sur l'écriture

$$\begin{aligned}\big|S_1 \cup \cdots \cup S_{n+1}\big| &= \big|\big(S_1 \cup \cdots \cup S_n\big) \cup S_{n+1}\big| \\ &= \big|S_1 \cup \cdots \cup S_n\big| + \big|S_{n+1}\big| - \big|(S_1 \cap S_{n+1}) \cup \cdots \cup (S_n \cap S_{n+1})\big|\end{aligned}$$

à laquelle on applique l'hypothèse de récurrence. □

Observons alors que si $i_1, \ldots, i_k \in E$ sont tous différents, alors

$$\big|S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}\big| = (n-k)!$$

puisqu'il s'agit des permutations fixant les k éléments donnés, et qu'on peut permuter comme on veut les $n - k$ éléments restants. Il suit que

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \big|S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}\big| = \binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!}{k!} .$$

Le résultat vient en combinant cette égalité avec le principe d'inclusion-exclusion.