Préparation à l'agrégation interne Oréans–Tours

Leçon 438

Exemples de problèmes de dénombrement – Utilisation en probabilités

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

Novembre 2020

Principes de base

- Soient A et B deux ensembles finis, et soit $f : A \to B$ une bijection. Alors A et B ont le même cardinal.

- Soit Ω un ensemble fini, et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité uniforme sur Ω. Alors pour tout événement $A \subset \Omega$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Les classiques

- Permutations sans répétition d'objets discernables :
  Il y a $n!$ permutations de n éléments.
- Permutations avec répétition d'objets discernables :
  Le nombre de permutations de n objets répartis en k classes dont les éléments sont indiscernables est
  $$\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$
  où n_i est le nombre d'objets dans la classe i, et $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$.

Les classiques

- Permutations sans répétition d'objets discernables :
  Il y a $n!$ permutations de n éléments.
- Permutations avec répétition d'objets discernables :
  Le nombre de permutations de n objets répartis en k classes dont les éléments sont indiscernables est
  $$\frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$$
  où n_i est le nombre d'objets dans la classe i, et $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$.
- Arrangements sans répétition :
  Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est égal à
  $$\frac{n!}{(n-k)!}$$
- Combinaisons sans répétition :
  Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est égal à
  $$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercices

1. Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire en utilisant au plus une fois chaque lettre de l'alphabet ?

2. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot MISSISSIPPI ?

3. Donner un argument combinatoire justifiant la relation

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

4. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 Pile en lançant 5 fois une pièce de monnaie équilibrée ?

Exercices

5. Montrer que le nombre de bijections sans point fixe de $\{1, \ldots, n\}$ est
$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Exercices

5. Montrer que le nombre de bijections sans point fixe de $\{1, \ldots, n\}$ est
$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   Indication : Si $S_1, \ldots S_n$ sont des sous-ensembles finis d'un même ensemble $\mathcal{E}$, alors on a le principe d'inclusion-exclusion
$$\left|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|S_i\right| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left|S_i \cap S_j\right| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \left|S_i \cap S_j \cap S_k\right| - \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1} \left|S_1 \cap \cdots \cap S_n\right| .$$

   Application : n invités laissent leur chapeau au vestiaire puis repartent les uns après les autres en reprenant un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité p_n qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas tend vers e^{-1} lorsque n tend vers $+\infty$.

Les nombres de Catalan

Définition

Le $n$ième nombre de Catalan est $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ $\qquad (n \in \mathbb{N},\ C_0 = 1)$

Voir https://oeis.org/A000108

Ce nombre intervient dans le dénombrement de

- manières de parenthéser un mot ;
- arbres binaires ;
- chemins de Dyck ;
- triangulations de polygones ;
- ...

Exercices

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ C_0 = 1)$$

1. Étudier la convergence de la série génératrice $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$.

2. Vérifier la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \qquad n \geqslant 0$$

3. Établir une relation entre $G(z)^2$ et $G(z)$, et en déduire une expression analytique de $G(z)$.

Notes

Exercices

4. Montrer que le nombre C_n d'arbres binaires à $n+1$ feuilles satisfait la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \qquad n \geqslant 0$$

En déduire que C_n est bien le $n$ième nombre de Catalan.

Exercices

5. Un mot de Dyck est un mot formé des parenthèses (et) placées «correctement ». Par exemple (()()) est un mot de Dyck, mais pas ())((().
   Montrer que le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$ est C_n,
   - soit par récurrence,
   - soit en établissant une bijection avec les arbres binaires ☠.

Voir aussi https://images.math.cnrs.fr/Resoudre-des-equations-en-comptant-des-arbres.html

Exercices

6. Un chemin de Dyck est une ligne brisée obtenue en associant un segment ascendant / à la parenthèse (, et un segment descendant \ à la parenthèse).

   Montrer qu'un chemin de Dyck est une ligne brisée ne descendant jamais en dessous du point de départ.

Application : Dans l'état de Paramécie, Biden et Trump sont arrivés à égalité. Sachant qu'il y a eu n votes, quelle est la probabilité que Trump ait été constamment donné en tête au cours du scrutin ?

Notes