# Leçon 437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires – Corrigé

**Exercice 1.** *On jette trois dés truqués: un dé blanc, dont 4 faces ont 2 points et 2 faces ont 5 points; un dé rouge, dont 4 faces ont 4 points et 2 faces ont 1 point; et un dé noir, dont toutes les faces ont 3 points. On note, respectivement, $X_\mathrm{b}$, $X_\mathrm{n}$ et $X_\mathrm{r}$ le nombre de points indiqués par le dé blanc, noir et rouge. Calculer*

$$\mathbb{P}(X_\mathrm{b} > X_\mathrm{r}) \;, \quad \mathbb{P}(X_\mathrm{r} > X_\mathrm{n}) \;, \quad \mathbb{P}(X_\mathrm{n} > X_\mathrm{b}) \;.$$

Un choix possible d'espace probabilisé est

$$\Omega = \{(2,\mathbf{4},\mathbf{3}),(5,\mathbf{4},\mathbf{3}),(2,\mathbf{1},\mathbf{3}),(5,\mathbf{1},\mathbf{3})\}$$

avec

$$p((2,\mathbf{4},\mathbf{3})) = \frac{4}{9}\;, \quad p((5,\mathbf{4},\mathbf{3})) = \frac{2}{9}\;, \quad p((2,\mathbf{1},\mathbf{3})) = \frac{2}{9}\;, \quad p((5,\mathbf{1},\mathbf{3})) = \frac{1}{9}\;.$$

Les variables aléatoires sont données par

$$X_\mathrm{b}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \omega_1\;, \quad X_\mathrm{r}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \omega_2\;, \quad X_\mathrm{n}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \omega_3\;.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_\mathrm{b} > X_\mathrm{r}) &= \mathbb{P}(\{(5,\mathbf{4},\mathbf{3}),(2,\mathbf{1},\mathbf{3}),(5,\mathbf{1},\mathbf{3})\}) = \frac{5}{9}\;,\\
\mathbb{P}(X_\mathrm{r} > X_\mathrm{n}) &= \mathbb{P}(\{(2,\mathbf{4},\mathbf{3}),(5,\mathbf{4},\mathbf{3}\}) = \frac{2}{3}\;,\\
\mathbb{P}(X_\mathrm{n} > X_\mathrm{b}) &= \mathbb{P}(\{(2,\mathbf{4},\mathbf{3}),(2,\mathbf{1},\mathbf{3})\}) = \frac{2}{3}\;.
\end{aligned}$$

On remarquera que chacune de ces probabilités est supérieure à $\frac{1}{2}$.

**Exercice 2.** *Déterminer l'espérance des variables aléatoires suivantes.*

1. *$X$ est le nombre de points obtenus en jetant un dé équilibré.*
   $X$ suit la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$, donc

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}\{X=k\} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}\;.$$

   On peut aussi remarquer que la loi de $X$ est symétrique autour de $\frac{7}{2}$.

2. *$X$ est la somme des points obtenus en jetant deux dés équilibrés.*
   Première méthode : utiliser la loi déterminée dans la série sur les variables aléatoires, exercice 4, question 2 :

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=2}^{12} x\mathbb{P}\{X=x\} = \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7\;.$$

Deuxième méthode : Soit $X_i$, $i \in \{1,2,3\}$, le résultat du jet numéro $i$. Alors $X_i$ suit une uniforme d'espérance $\frac{7}{2}$. On a $X = X_1 + X_2$, donc par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 7 \ .$$

3. *On jette* $3$ *dés ayant chacun* $4$ *faces rouges et* $2$ *faces bleues.* $X$ *est le nombre de dés montrant une face rouge.*

   Première méthode : utiliser la loi déterminée dans la série sur les variables aléatoires, exercice 4, question 3 :

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{3} x\mathbb{P}\{X = x\} = 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{12}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27} = \frac{54}{27} = 2 \ .$$

   Deuxième méthode : Soit $X_i$, $i \in \{1,2,3\}$, le résultat du jet numéro $i$. Alors $X_i$ suit une loi de Bernoulli d'espérance $\frac{2}{3}$. On a $X = X_1 + X_2 + X_3$, donc par linéarité de l'espérance,

   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 2 \ .$$

   Troisième méthode : $X$ suit une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{2}{3})$. Son espérance vaut donc $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

4. *On jette* $3$ *pièces de monnaie équilibrées.* $X$ *est le nombre de Pile obtenu.*

   $X$ suit une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{2})$. Son espérance vaut donc $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

5. $X$ *est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne* $6$ *pour la première fois.*

   Nous avons vu (série sur les variables aléatoires, exercice 4, question 5) que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$ :

   $$\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \qquad \forall x \in \mathbb{N}^* \ .$$

   Il s'agit donc de calculer la somme de la série

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \ .$$

   La série géométrique satisfait

   $$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} =: f(z)$$

   pour tout $z$ tel que $|z| < 1$. Pour les mêmes valeurs de $z$ on a donc

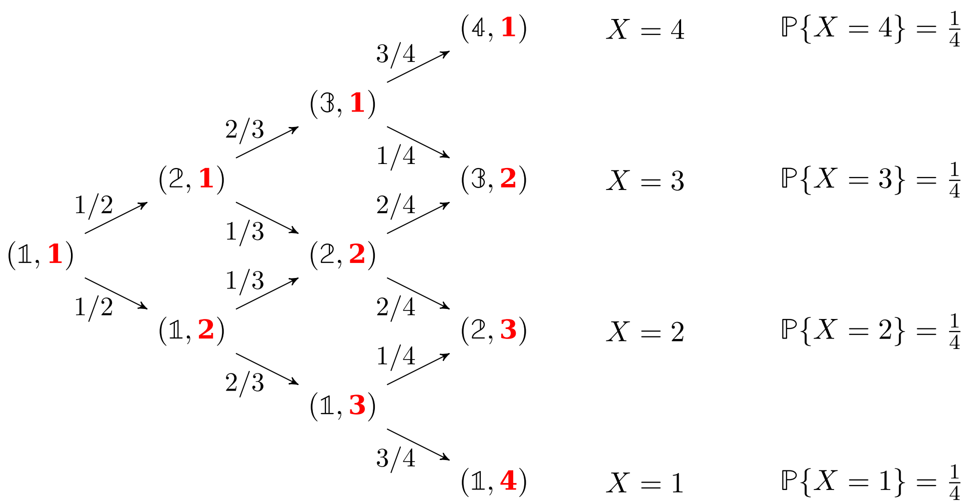
   $$\frac{1}{(1-z)^2} = f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} \ .$$

   Il suit que

   $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} f'\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6} \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6 \ .$$

**Exercice 3.** *Une urne contient une boule blanche et une noire. A trois reprises, on tire une boule dans l'urne, puis on la remet en ajoutant une deuxième boule de la même couleur. Soit $X$ le nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne après les trois tirages. Déterminer sa loi et son espérance. Peut-on généraliser à $k$ tirages? Que se passe-t-il si l'urne contient initialement une boule blanche et deux boules noires?*

La situation peut être décrite par l'arbre suivant. Les nombres sur les flèches donnent les probabilités conditionnelles d'arriver dans l'état au bout de la flèche, sachant qu'on est parti de l'état d'où part la flèche.




$X$ suit donc une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$, d'espérance $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{2}$.

Plus généralement, montrons par récurrence que le nombre $X_k$ de boules blanches après $k$ tirages suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, k+1\}$. L'initialisation de la récurrence suit du calcul ci-dessus. Comme l'urne contient $k + 2$ boules après $k$ tirages, nous avons pour tout $n \in \{1, \dots, k + 2\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_{k+1} = n | X_k = n - 1\} &= \frac{n-1}{k+2} \\ \mathbb{P}\{X_{k+1} = n | X_k = n\} &= \frac{k+2-n}{k+2} \ ,\end{aligned}$$

puisque l'urne contient $n - 1$ boules blanches dans le premier cas, et $k + 2 - n$ boules rouges dans le second cas. Il suit de l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_{k+1} = n\} &= \mathbb{P}\{X_{k+1} = n | X_k = n - 1\}\mathbb{P}\{X_k = n - 1\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{X_{k+1} = n | X_k = n\}\mathbb{P}\{X_k = n\} \\ &= \left(\frac{n-1}{k+2} + \frac{k+2-n}{k+2}\right)\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+2} \ .\end{aligned}$$

La récurrence est démontrée. Il suit que $\mathbb{E}(X_k) = \frac{k+2}{2}$.

**Exercice 4.** *Deux urnes $U_1$ et $U_2$ contiennent initialement un jeton numéroté $0$ et un jeton numéroté $1$. On choisit au hasard et simultanément un jeton de $U_1$ et un jeton de $U_2$. On place alors dans $U_1$ le jeton provenant de $U_2$ et dans $U_2$ le jeton provenant de $U_1$. On note $X_n$ la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans l'urne $U_1$ après $n$ échanges. On convient de poser $X_0 = 1$.*

1. *Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre la loi de $X_{n+1}$ et celle de $X_n$.*
2. *Déterminer la loi de $X_n$.*

Commençons par noter qu'il y a toujours $2$ jetons de chaque sorte, et $2$ jetons dans chaque urne. Par conséquent, $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et si la somme des points des jetons dans $U_1$ vaut $X_n$, alors celle des jetons dans $U_2$ vaut $2 - X_n$. Ainsi la valeur de $X_n$ détermine le contenu des deux urnes. On peut alors distinguer $3$ cas :

- Si $X_n = 0$, alors $U_2$ ne contient que des jetons numérotés $1$, donc nécessairement à l'étape suivante, chaque urne contient $1$ jeton de chaque type, c-à-d $X_{n+1} = 1$ :

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = 1 | X_n = 0\} = 1 \ .$$

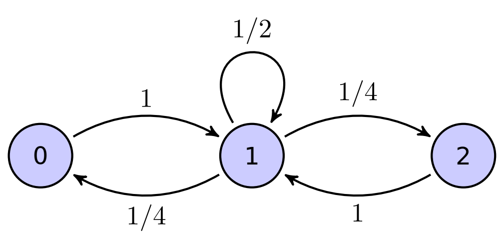
- Si $X_n = 1$, alors chaque urne contient un jeton de chaque type. Si l'on tire deux jetons de même type, la somme des points ne change pas. En revanche, si l'on tire un jeton de chaque type, la somme change de $\pm 1$. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_{n+1} = 0 | X_n = 1\} &= \frac{1}{4} && \text{(jeton $1$ tiré dans $U_1$ et $0$ dans $U_2$)}, \\
\mathbb{P}\{X_{n+1} = 1 | X_n = 1\} &= \frac{1}{2} && \text{(deux jetons tirés de même type)}, \\
\mathbb{P}\{X_{n+1} = 2 | X_n = 1\} &= \frac{1}{4} && \text{(jeton $0$ tiré dans $U_1$ et $1$ dans $U_2$)}.
\end{aligned}$$

- Si $X_n = 2$, alors les $2$ jetons numérotés $1$ sont dans $U_1$, et l'un d'eux se retrouve dans $U_2$ au tour suivant :

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = 1 | X_n = 2\} = 1 \ .$$

On peut résumer la situation par le graphe suivant :




On dit qu'on a affaire à une chaîne de Markov. Si l'on note

$$a_n = \mathbb{P}\{X_n = 0\} \ , \quad b_n = \mathbb{P}\{X_n = 1\} \ , \quad c_n = \mathbb{P}\{X_n = 2\} \ ,$$

alors on obtient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n \ , \\ b_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \ , \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n \ . \end{aligned}$$

En particulier, $a_n = c_n$ pour tout $n$. En cherchant les points fixes, on trouve que ce système admet $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ comme distribution de probabilité invariante. Les différences $x_n = a_n - \frac{1}{6} = c_n - \frac{1}{6}$ et $y_n = b_n - \frac{2}{3}$ satisfont

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4} y_n \ , \\ y_{n+1} &= 2x_n + \frac{1}{2} y_n \ . \end{aligned}$$

De plus, comme $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$, on a les valeurs initiales $x_0 = -\frac{1}{6}$ et $y_0 = \frac{1}{3}$. On vérifie alors par récurrence que $x_n = (-\frac{1}{2})^n x_0$ et $y_n = (-\frac{1}{2})^n y_0$, ce qui donne

$$a_n = \frac{1}{6}\biggl[1 - \biggl(-\frac{1}{2}\biggr)^n\biggr] = c_n \ , \qquad b_n = \frac{1}{3}\biggl[2 + \biggl(-\frac{1}{2}\biggr)^n\biggr] \ .$$

En particulier, dans la limite $n \to \infty$, $a_n$ et $c_n$ convergent vers $\frac{1}{6}$, alors que $b_n$ converge vers $\frac{2}{3}$.

**Remarque :** on peut aussi arriver à ce résultat en diagonalisant la matrice reliant $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ à $(a_n, b_n, c_n)$, ou celle reliant $(x_{n+1}, y_{n+1})$ à $(x_n, y_n)$.

**Exercice 5.**

*Démontrer l'équivalence des deux définitions de l'espérance.*

Notons qu'on a la partition

$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x\} =: \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$$

de $\Omega$ en événements deux à deux disjoints. Comme

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}\Bigl(\bigl\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x\bigr\}\Bigr) = \sum_{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x} p(\omega) \ ,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\} &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x} p(\omega) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X = x\}} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \ . \end{aligned}$$

**Exercice 6.**

1. *Montrer que*
$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$
*pour toutes v.a.r. $X$ et $Y$ admettant une espérance, et tout $a, b \in \mathbb{R}$.*
Commençons par montrer que l'espérance de $aX+bY$ existe si les espérances de $X$ et $Y$ existent. Ceci suit du fait que sous cette condition,
$$\sum_{\omega\in\Omega} |aX(\omega)+bY(\omega)|p(\omega) \leqslant |a| \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|p(\omega) + |b| \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|p(\omega) < \infty \;.$$
Nous avons alors
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX+bY) &= \sum_{\omega\in\Omega} \bigl[aX(\omega)+bY(\omega)\bigr]p(\omega) \\ &= a\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) + b\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \;.\end{aligned}$$

2. *Montrer que*
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \bigl(\mathbb{E}(X)\bigr)^2$$
En utilisant la linéarité de l'espérance et $\mathbb{E}(1) = 1$, on obtient
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\bigl(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\bigr) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \;.$$

3. *Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors*
$$\operatorname{Var}(aX+b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$$
Comme $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$, on a
$$\operatorname{Var}(aX+b) = \mathbb{E}\bigl([aX+b-\mathbb{E}(aX+b)]^2\bigr) = \mathbb{E}\bigl(a^2[X-\mathbb{E}(X)]^2\bigr) = a^2\operatorname{Var}(X) \;.$$

4. *Montrer que* $\operatorname{Var}(X) = 0$ *si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{X = c\} = 1$, et qu'alors on a nécessairement $c = \mathbb{E}(X)$.*
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) = 0 &\Leftrightarrow \mathbb{E}([X-\mathbb{E}(X)]^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} [x-\mathbb{E}(X)]^2\mathbb{P}\{X=x\} = 0 \\ &\Leftrightarrow [x-\mathbb{E}(X)]^2\mathbb{P}\{X=x\} = 0 \quad \forall x\in X(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega)\colon x = \mathbb{E}(X) \text{ ou } \mathbb{P}\{X=x\} = 0 \;.\end{aligned}$$
Il peut exister au plus un $x$ dans $X(\Omega)$ égal à $\mathbb{E}(X)$. Toutefois, si on avait $x \neq \mathbb{E}(X)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, on devrait avoir $\mathbb{P}\{X = x\} = 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$, ce qui contredirait le fait que $\mathbb{P}$ est une probabilité. Il existe donc exactement un $x$ dans $X(\Omega)$ égal à $\mathbb{E}(X)$. Appelons $c$ ce $x$. On a alors $\mathbb{P}\{X = x\} = 0$ pour tout $x \neq c$, donc $\mathbb{P}\{X = c\} = 1$. De plus, $\mathbb{E}(X) = c\mathbb{P}\{X = c\} = c$.

**Exercice 7.** *Déterminer les variances des variables aléatoires suivantes.*

1. *On jette un dé équilibré ayant $4$ faces rouges et $2$ faces bleues. $X$ vaut $1$ si on obtient une face rouge, $0$ sinon.*
   On a $\mathbb{P}\{X = 1\} = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}\{X = 0\} = \frac{1}{3}$ ($X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{1} x\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{2}{3} \,, \\ \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{1} x^2\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{2}{3} \,, \\ \operatorname{Var}(X) &= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \,. \end{aligned}$$

2. *On jette $3$ pièces de monnaie équilibrées. $X$ est le nombre de Pile obtenu.*
   $X$ suit une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{2})$. Nous avons vu que $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$. Le calcul fournit $\mathbb{E}(X^2) = 3$, et par conséquent $\operatorname{Var}(X) = \frac{3}{4}$.
   On peut également utiliser le fait qu'une loi binomiale de paramètres $(n, p)$ admet la variance $np(1 - p)$ (c'est la somme de $n$ variables indépendantes de Bernoulli, de variance $p(1 - p)$).

3. *$X$ est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne $6$ pour la première fois.*
   Nous avons vu que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Soit $f(z) = (1 - z)^{-1}$ la somme de la série géométrique de raison $z$. Alors, pour $|z| < 1$, on a

$$\frac{2}{(1 - z)^3} = f''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k - 1)z^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k - 1)z^{k-2} \,.$$

   Il suit que

$$\mathbb{E}(X(X - 1)) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1 - x)\mathbb{P}\{X = x\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} f''\left(\frac{5}{6}\right) = 60 \,,$$

   d'où $\mathbb{E}(X^2) = 66$ et $\operatorname{Var}(X) = 30$.

   **Remarque :** Pour une loi géométrique de paramètre $p$, un raisonnement analogue montre que l'espérance vaut $1/p$ et la variance $(1 - p)/p^2$.

**Exercice 8.** *Un questionnaire à choix multiples comporte 10 questions, offrant chacune trois réponses (dont une seule est correcte). Soit $X$ le nombre de réponses justes obtenues par un étudiant répondant au hasard à chaque question. Quelle est la loi de $X$ ? Déterminer*

- *l'espérance de $X$ ;*
- *son écart-type;*
- *la probabilité que l'étudiant ne donne aucune réponse juste;*
- *la probabilité qu'il donne plus de $6$ réponses justes.*

$X$ suit une loi binomiale de paramètres $(10, \frac{1}{3})$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \binom{10}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} , \qquad x = 0, 1, \dots, 10 .$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = \frac{10}{3}$, $\operatorname{Var}(X) = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$, donc l'écart-type de $X$ vaut

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \simeq 1{,}49 .$$

La probabilité qu'il ne donne aucune réponse juste est $\mathbb{P}\{X = 0\} = (\frac{2}{3})^{10} \simeq 0{,}017$. En utilisant la symétrie $x \mapsto 10 - x$ de la loi binomiale, nous pouvons écrire

$$\mathbb{P}\{X \geqslant 6\} = \frac{1}{2}\mathbb{P}\{X \neq 5\} = \frac{1}{2}\left[1 - \binom{10}{5}\frac{2^5}{3^{10}}\right] \simeq 0{,}43 .$$

(On obtient également $\mathbb{P}\{X > 6\} \simeq 0{,}37$.)

**Exercice 9.**

1. *Montrer que*
$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
Par linéarité,
$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) .$$

2. *Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors*
$$\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$$
Cela suit de la bilinéarité de la covariance, ou encore du fait que
$$\operatorname{cov}(aX, bY) = \mathbb{E}\big([aX - a\mathbb{E}(X)][bY - b\mathbb{E}(Y)]\big) .$$

3. *Montrer que*
$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$$
Il suffit de développer le carré dans
$$\operatorname{Var}(X + Y) = \mathbb{E}\big([(X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y))]^2\big) .$$

**Exercice 10.** *Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de* $1$ *à* $4$*, on considère les variables aléatoires* $X$*, égale à la somme des points, et* $Y$*, égale à leur différence (en valeur absolue).*

1. *Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience.*
   Il suffit de prendre $\Omega = \{1,2,3,4\}^2$ avec la probabilité uniforme.

2. *Déterminer la loi conjointe de* $X$ *et* $Y$*, leurs lois marginales ainsi que leurs espérances.*
   Les lois de $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ et $Y(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|$ peuvent être déduites des tableaux suivants (on compte le nombre de cas donnant chaque valeur de $X$ et $Y$) :

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

   Par simple dénombrement, on obtient leur loi conjointe et les marginales :

| $Y\backslash X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/16$ | $0$ | $1/16$ | $0$ | $1/16$ | $0$ | $1/16$ | $4/16$ |
| 1 | $0$ | $2/16$ | $0$ | $2/16$ | $0$ | $2/16$ | $0$ | $6/16$ |
| 2 | $0$ | $0$ | $2/16$ | $0$ | $2/16$ | $0$ | $0$ | $4/16$ |
| 3 | $0$ | $0$ | $0$ | $2/16$ | $0$ | $0$ | $0$ | $2/16$ |
| | $1/16$ | $2/16$ | $3/16$ | $4/16$ | $3/16$ | $2/16$ | $1/16$ | |

   On en déduit les espérances

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=2}^{8} x\mathbb{P}\{X = x\} = 5 \;, \qquad \mathbb{E}(Y) = \sum_{y=0}^{3} y\mathbb{P}\{Y = y\} = \frac{5}{4} \;.$$

3. *Déterminer la convariance de* $X$ *et de* $Y$ *ainsi que la variance de* $X + Y$*.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x=2}^{8}\sum_{y=0}^{3} xy\mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \frac{25}{4} \;, \\
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 \;, \\
\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{55}{2} - 5^2 = \frac{5}{2} \;, \\
\operatorname{Var}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \;, \\
\operatorname{Var}(X+Y) &= \frac{5}{2} + \frac{15}{16} + 2 \cdot 0 = \frac{55}{16} \;.
\end{aligned}$$

   On remarquera que $X$ et $Y$ sont non corrélées ($\operatorname{cov}(X,Y) = 0$), mais pas indépendantes ($\mathbb{P}\{X = x, Y = y\} \neq \mathbb{P}\{X = x\}\mathbb{P}\{Y = y\}$ en général).