Leçon 437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires

Rappels de théorie

Voici quelques rappels repris de la feuille « Modélisation et probabilités discrètes ».

Variables aléatoires

Une *variable aléatoire réelle* (v.a.r.) sur un espace probabilisé discret (Ω, p) est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Son *image* est

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$$

La *loi* d'une v.a.r. associe à chaque $x \in X(\Omega)$ la probabilité que X soit égale à x :

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(\{\omega \colon X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega \colon X(\omega)=x} p(\omega)$$

Espérance

L'espérance d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé discret (Ω, p) est définie à condition que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$$

(c'est toujours le cas si Ω est fini).
Sous cette condition, on définit l'*espérance* de X par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\}$$

Cette définition est équivalente à

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Plus généralement, pour une fonction $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, on définit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) p(\omega)$$

à condition que la somme des $|f(x)| \mathbb{P}\{X = x\}$ converge.

Variance

La *variance* d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé discret (Ω, p) est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X)]^2\big)$$

Elle peut éventuellement être infinie si Ω est infini.
On appelle *écart-type* la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Loi conjointe, marginales, covariance

Soient X et Y deux v.a.r. sur un espace probabilisé discret (Ω, p). La *loi conjointe* de X et Y associe à tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ la valeur

$$\mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\})) = \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$$

(la virgule signifiant “et”).
La *loi marginale de* X est déterminée par

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\{X = x, Y = y\}$$

et la *loi marginale de* Y est définie de manière analogue.
La *covariance* de X et Y est défine par

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big)$$

Exercices

Exercice 1. On jette trois dés truqués: un dé blanc, dont 4 faces ont 2 points et 2 faces ont 5 points; un dé rouge, dont 4 faces ont 4 points et 2 faces ont 1 point; et un dé noir, dont toutes les faces ont 3 points. On note, respectivement, X_{b}, X_{n} et X_{r} le nombre de points indiqués par le dé blanc, noir et rouge. Calculer

$$\mathbb{P}(X_{\mathrm{b}} > X_{\mathrm{r}}) \ , \quad \mathbb{P}(X_{\mathrm{r}} > X_{\mathrm{n}}) \ , \quad \mathbb{P}(X_{\mathrm{n}} > X_{\mathrm{b}}) \ .$$

Exercice 2. Déterminer l'espérance des variables aléatoires suivantes.

1. X est le nombre de points obtenus en jetant un dé équilibré.
2. X est la somme des points obtenus en jetant deux dés équilibrés.
3. On jette 3 dés ayant chacun 4 faces rouges et 2 faces bleues. X est le nombre de dés montrant une face rouge.
4. On jette 3 pièces de monnaie équilibrées. X est le nombre de Pile obtenu.
5. X est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne 6 pour la première fois.

Exercice 3. Une urne contient une boule blanche et une noire. A trois reprises, on tire une boule dans l'urne, puis on la remet en ajoutant une deuxième boule de la même couleur. Soit X le nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne après les trois tirages. Déterminer sa loi et son espérance. Peut-on généraliser à k tirages? Que se passe-t-il si l'urne contient initialement une boule blanche et deux boules noires?

Exercice 4. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent initialement un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1. On choisit au hasard et simultanément un jeton de U_1 et un jeton de U_2. On place alors dans U_1 le jeton provenant de U_2 et dans U_2 le jeton provenant de U_1. On note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans l'urne U_1 après n échanges. On convient de poser $X_0 = 1$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre la loi de X_{n+1} et celle de X_n.
2. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 5.

Démontrer l'équivalence des deux définitions de l'espérance.

Exercice 6.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$
pour toutes v.a.r. X et Y admettant une espérance, et tout $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$
3. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors
$$\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$$
4. Montrer que $\operatorname{Var}(X) = 0$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{X = c\} = 1$, et qu'alors on a nécessairement $c = \mathbb{E}(X)$.

Exercice 7. Déterminer les variances des variables aléatoires suivantes.

1. On jette un dé équilibré ayant 4 faces rouges et 2 faces bleues. X vaut 1 si on obtient une face rouge, 0 sinon.
2. On jette 3 pièces de monnaie équilibrées. X est le nombre de Pile obtenu.
3. X est le nombre de fois que l'on doit jeter un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne 6 pour la première fois.

Exercice 8. Un questionnaire à choix multiples comporte 10 questions, offrant chacune trois réponses (dont une seule est correcte). Soit X le nombre de réponses justes obtenues par un étudiant répondant au hasard à chaque question. Quelle est la loi de X? Déterminer

- l'espérance de X;
- son écart-type;
- la probabilité que l'étudiant ne donne aucune réponse juste;
- la probabilité qu'il donne plus de 6 réponses justes.

Exercice 9. ☠

1. Montrer que
$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors
$$\operatorname{cov}(aX, bY) = ab \operatorname{cov}(X, Y)$$
3. Montrer que
$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

Exercice 10. Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, dont les faces sont numérotées de 1 à 4, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).

1. Spécifier un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience.
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y, leurs lois marginales ainsi que leurs espérances.
3. Déterminer la convariance de X et de Y ainsi que la variance de $X + Y$.