Leçon 435 : Exemples d'études probabilistes de situations concrètes

Exercices

Exercice 1 (Chaîne de Markov)**.** Angèle possède 3 parapluies. Chaque jour, elle va au bureau le matin, et revient à son domicile le soir. Pour chaque trajet, elle emporte avec elle un parapluie s'il pleut, et s'il y en a au moins un sur place. Elle n'emporte pas de parapluie s'il ne pleut pas. On suppose que la probabilité qu'il pleuve au début de chaque trajet est de $1/3$, et qu'elle est indépendante de la météo lors de tous les autres trajets. Soit X_n le nombre de parapluies qu'Angèle possède sur place avant de débuter le $n$ième trajet.

1. Déterminer les probabilités de transition $\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$. En déduire une matrice P permettant d'exprimer la loi de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.
2. Vérifier que P admet la valeur propre 1, et déterminer les vecteurs propre (à gauche et à droite) associés.
3. Quelle est la probabilité, asymptotiquement au bout d'un grand nombre de voyages, qu'Angèle ne dispose pas de parapluie sur place au moment de partir?
4. Quelle est la probabilité asymptotique qu'elle se fasse mouiller bêtement, c'est-à-dire qu'elle n'ait pas de parapluie à sa disposition alors qu'il pleut dès son départ?

Exercice 2 (Le problème de Monty Hall)**.** Dans un jeu télévisé, il y a 3 portes fermées; derrière l'une d'elles se trouve une luxueuse voiture, alors que chacune des deux autres cache une chèvre. Le candidat commence par choisir une porte, qui reste fermée. L'animateur ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat peut alors choisir entre

- maintenir son choix;
- choisir l'autre porte.

De toute manière, il remporte ce qui se trouve derrière la porte finalement choisie. Sachant qu'il veut gagner la voiture, que lui conseillez-vous?

Exercice 3 (La méthode probabiliste d'Erdös)**.** On considère un tournoi au cours duquel s'affrontent n équipes. Le tournoi est tel que

- Chaque équipe affronte chaque autre équipe.
- Lors de chaque rencontre, il y a un vainqueur et un perdant (pas d'ex-æquo).

L'issue du tournoi peut être représentée par un graphe complet, orienté, à n sommets. Une arrête orientée part du sommet i et arrive au sommet j chaque fois que l'équipe i a vaincu l'équipe j.

On dit qu'un tournoi est *2-indécis* s'il existe au moins une issue avec la propriété suivante : Pour chaque paire d'équipes, il existe au moins une troisième équipe ayant battu les deux équipes de cette paire.

1. Que signifie la propriété d'être 2-indécis en termes de graphes ?
2. Supposons que dans chaque rencontre, chacune des deux équipes a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de gagner, indépendamment des autres rencontres. Fixons trois équipes A, B et C. Quelle est la probabilité que C batte A et B ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune des $n-2$ autres équipes batte à la fois A et B ?
4. Combien y a-t-il de paires d'équipes ? Majorer la probabilité qu'aucune de ces paires ne se soit fait battre par une même équipe.
5. En déduire une minoration de la probabilité que le tournoi soit 2-indécis. En conclure que de tels tournois existent si n est assez grand.
6. On dit qu'un tournoi est k-*indécis* s'il existe au moins une issue telle que pour chaque k-uplet d'équipes, il existe au moins une autre équipe ayant battu toutes les équipes de ce k-uplet. Montrer que pour tout k, il existe des tournois k-indécis si n est assez grand.

Référence : `https://images.math.cnrs.fr/Probabiliser.html`