Leçon 427 : Exemples d'études de fonctions définies par une intégrale

Rappels de théorie

Théorème 1 (Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre)**.** *Soient $a < b$ deux nombres réels, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continue. Si, de plus, I est ouvert, et f admet une dérivée partielle par rapport à y qui est continue, alors g est continûment différentiable, et pour tout $y \in I$, on a

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\ .$$

Théorème 2 (Changement de variables dans une intégrale)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Alors*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Ces théorèmes s'adaptent à des fonctions f continues par morceaux en écrivant son intégrale comme une somme d'intégrales sur des intervalles sur lesquels f est continue.

Exercices

Exercice 1.
Soit la fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variables $t = 1/u$.
2. À l'aide d'un autre changement de variables, calculer $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \cos(tx)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$, et en déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Fonction Gamma d'Euler)**.**
Soit $\Gamma :]0, \infty] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(\frac{1}{2})$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et en déduire $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n - \frac{1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donner une expression sous forme d'intégrale de ses dérivées.
4. Montrer que Γ est convexe et étudier ses variations.