Leçon 423 : Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone

Corrigé partiel des exercices

Exercice 4 (Fonction génératrice)**.**

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, de densité f. Pour $s < 0$, on définit sa transformée de Laplace par

$$L(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{sx} f(x) \, \mathrm{d}x = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{sX}\big) \; .$$

Puisque $|\mathrm{e}^{sx}| \leqslant 1$ pour $s \leqslant 0$ et que l'intégrale de f vaut 1, cette quantité est bien définie pour tout $s \leqslant 0$.

Considérons le cas $k = 1$. Alors, par le théorème de dérivée sous le signe intégral,

$$L'(s) = \int_0^\infty x \, \mathrm{e}^{sx} f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Notons que si $s < 0$, alors $|x \, \mathrm{e}^{sx}|$ est majorée par $1/(|s| \, \mathrm{e})$ pour $x \geqslant 0$. Par conséquent, $L'(s)$ est bien définie pour tout $s < 0$.

Soit $(s_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante, convergeant vers 0 lorsque $n \to \infty$, et posons

$$g_n(x) = x \, \mathrm{e}^{s_n x} f(x) \; .$$

Alors pour tout $x \geqslant 0$, $g_n(x)$ est une fonction croissante de n, et

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = x f(x) \; .$$

Si X est intégrable, alors

$$\int_0^\infty \big|x\big| f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x = \mathbb{E}(X) < \infty \; .$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à $(g_n)_{n \geqslant 0}$ pour obtenir

$$\lim_{n \to \infty} L'(s_n) = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty g_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x = \mathbb{E}(X) \; .$$

Ceci étant vrai pour toute suite croissante $(s_n)_{n \geqslant 1}$ convergeant vers 0, on en déduit que $L'(s)$ converge vers $\mathbb{E}(X)$ lorsque s converge vers 0 par valeurs négatives.

Plus généralement, pour tout $k \geqslant 1$ et $s < 0$,

$$L^{(k)}(s) = \int_0^\infty x^k \, \mathrm{e}^{sx} f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Un raisonnement analogue montre que si X admet un moment d'ordre k, alors $L^{(k)}(s)$ converge vers $\mathbb{E}(X^k)$ lorsque s converge vers 0 par valeurs négatives.