Leçon 423 : Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone

Rappels de théorie

Voici les énoncés des théorèmes de convergence monotone et dominée figurant au programme de l'agrégation interne (Section 9.8).

Théorème 1 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de fonctions intégrables, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite des intégrales des f_n est majorée ; en ce cas, l'intégrale de f est la limite de celles des f_n.*

Théorème 2 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.*

Exercices

Exercice 1. À l'aide du théorème de convergence monotone, calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 2 (Fonction Gamma)**.**

1. Soit
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
la fonction Gamma d'Euler. Montrer que
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$
pour tout $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(1)$, et en déduire que
$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ .$$

2. Montrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m\,\mathrm{d}x = m!$$
pour tout $m\in\mathbb{N}$.

Exercice 3 (Formule de Stirling)**.**

1. À l'aide du changement de variables $t = n + \sqrt{n}s$, trouver une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues par morceaux, telles que
$$\Gamma(n+1) = n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s) \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2\pi}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$
2. À l'aide d'un développement limité de $\ln(f_n)$, calculer
$$\lim_{n\to\infty} f_n(s)$$
pour tout $s \in \mathbb{R}$.
3. Soit
$$g(s) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-s^2/6} & \text{si } s \leqslant 1 \; , \\ \mathrm{e}^{-(s-1)/2} & \text{si } s > 1 \; . \end{cases}$$
Montrer que $f_n(s) \leqslant g(s)$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $s \in \mathbb{R}$, et que g est intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. En appliquant le théorème de convergence dominée, calculer
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s) \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2\pi}} \; .$$
5. En déduire la formule de Stirling :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 \; .$$

Exercice 4 (Fonction génératrice)**.**

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, de densité f. Pour $s < 0$, on définit sa transformée de Laplace par
$$L(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{sx} \, f(x) \, \mathrm{d}x = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{sX}\big) \; .$$
Soit $k \geqslant 1$. À l'aide du théorème de convergence monotone, montrer que si X admet un moment d'ordre k, alors
$$\mathbb{E}\big(X^k\big) = \lim_{s \nearrow 0} L^{(k)}(s) \; ,$$
où $L^{(k)}$ est la $k$ième dérivée de L.