Leçon 421 : Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.

Méthode de séparation des variables

Soit l'EDO
$$y'(t) = a(t)b(y(t)) ,$$
pour des fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assez régulières (par exemple de classe $\mathcal{C}^1$). Un Ansatz de solution peut être obtenu en écrivant
$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{b(y)} = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s ,$$
puis en calculant si possible l'intégrale, puis exprimant $y(t)$ en fonction des données initiales, et en vérifiant finalement le domaine de définition.

Exercice 1. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'(t) = \cos(t)y(t)$, $y(0) = 1$.
2. $y'(t) = y(t)^2$, $y(0) \in \mathbb{R}$.
3. $y'(t) = \sqrt{y(t)}$, $y(0) \in]0, \infty[$ (*équation du seau troué*).

Méthode de la variation de la constante

Soit l'EDO linéaire
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$
pour des fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'équation homogène (avec $b(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) se résout par séparation des variables :
$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha(t,t_0)}\, y(t_0) , \qquad \alpha(t, t_0) = \int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s .$$
Le cas inhomogène se résout alors en posant $y(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{\alpha(t,t_0)}$, et en trouvant et résolvant l'équation obtenue pour c. La méthode se généralise à certaines équations non-linéaires.

Exercice 2. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'(t) = \cos(t)y(t) + \sin(t)$, $y(0) = 1$.
2. $y'(t) = ty(t) - y(t)^3$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ (exemple d'équation de Bernoulli).

Solutions sous forme de série entière

Exercice 3. Montrer que l'EDO
$$(1 + t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0 , \qquad y(0) = a_0 , \quad y'(0) = a_1$$
admet une unique solution développable en série entière sur $] - 1, 1[$.

Équations linéaires d'ordre $\geqslant 2$ et exponentielle de matrice

Considérons l'EDO scalaire d'ordre $k \geqslant 2$

$$x^{(k)}(t) + b_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \cdots + b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t) = 0$$

où $b_0, \dots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$. Cette équation est équivalente au système linéaire

$$y'(t) = Ay(t)$$

où A est la matrice $k \times k$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & \dots & \dots & -b_{k-1} \end{pmatrix}$$

La solution de $y'(t) = Ay(t)$ avec $y(0) = y_0$ s'écrit

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA}\, y(0) \;, \qquad \mathrm{e}^{tA} = \sum_{p \geqslant 0} \frac{t^p}{p!} A^p \;.$$

La série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Résoudre le problème de Cauchy (pour $\gamma \geqslant 0$, $\omega > 0$)

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = 0 \;, \qquad x(0) = x_0 \;, x'(0) = v_0 \;.$$

Inégalité de Gronwall

Soient $k > 0, b \in \mathbb{R}$ des constantes, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant

$$|y'(t)| \leqslant k|y(t)| + b \qquad \forall t \in I \;.$$

Alors pour tout $t, t_0 \in I$ on a

$$|y(t)| \leqslant |y(t_0)|\, \mathrm{e}^{k|t-t_0|} + \frac{b}{k}\left[\mathrm{e}^{k|t-t_0|} - 1\right] \;.$$

Exercice 5. Trouver une majoration pour la valeur absolue de la solution de l'EDO

$$y'(t) = \tanh(t)\cos(y(t)) + \sin(t)y(t) \;, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \;.$$

En déduire que la solution maximale est globale (existe pour tout $t \in \mathbb{R}$).