Leçon 411 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications

Rappels de théorie

Théorème 1 (Théorème de Dirichlet)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique, de période 2π, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On suppose de plus qu'en tout point de discontinuité x_0 de f, on a*

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\big[f(x_0+) + f(x_0-)\big] ,$$

où $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ désignent les limites à droite et à gauche de f en x_0.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) ,$$

où

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x , \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x , && n \geqslant 1 , \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x , && n \geqslant 1 .
\end{aligned}$$

Alors, la suite de fonctions $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge simplement vers f en tout $x \in \mathbb{R}$ lorsque $N \to \infty$.

Théorème 2 (Identité de Parseval)**.** *Dans la situation du théorème précédent,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) .$$

Exercices

Exercice 1 (Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$)**.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique donnée par

$$f(x) = x^2 \qquad \text{pour } -\pi \leqslant x \leqslant \pi .$$

   Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

2. En déduire la valeur de

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

3. À l'aide du théorème de Parseval, calculer

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \ .$$

Exercice 2 (La corde de piano)**.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 2\pi - x & \text{pour } \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \ . \end{cases}$$

   Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

2. On admet que le déplacement d'une corde de piano de longueur 2π est décrite par la fonction $u(x,t)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & & \forall x \in [0, 2\pi] \ , \forall t \geqslant 0 \ , \\ u(0,t) &= 0 & & \forall t \geqslant 0 \ , \\ u(2\pi,t) &= 0 & & \forall t \geqslant 0 \ . \end{aligned}$$

   Montrer que cette équation admet des solutions de la forme

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx) \ ,$$

   si $a_n(t)$ et les $b_n(t)$ satisfont une équation différentielle que l'on déterminera.

3. Déterminer $u(x,t)$ si

$$u(x,0) = f(x) \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \forall x \in [0, 2\pi] \ .$$