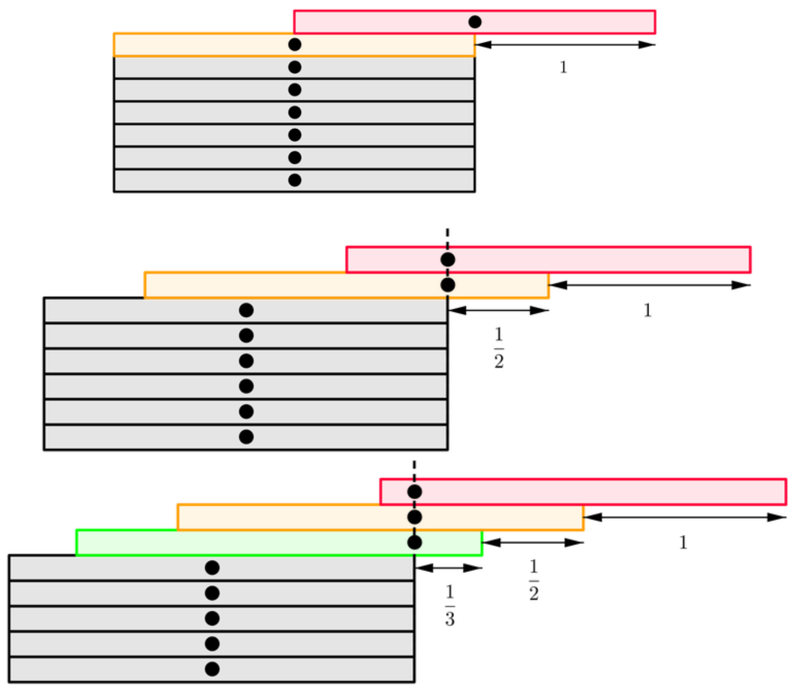
Leçon 402 : Exemples d'études de suites ou de séries divergentes

Exercices

Exercice 1 (La tour penchée)**.**
On dispose d'un grand nombre de Legos identiques, de longueur 2. Le but est de construire une tour qui reste en équilibre, alors même qu'elle penche le plus possible vers un côté.

1. Vérifier que les constructions suivantes sont toutes à l'équilibre. On supposera que la tour est stable tant que le centre de gravité de la partie qui dépasse est au-dessus de sa base.



2. Comment généraliser cette construction à n Legos ? Quelle est alors la distance maximale que la tour peut atteindre ?

Référence :
`https://images.math.cnrs.fr/Une-tour-de-cartes-qui-penche-a-l-infini.html`

Exercice 2 (Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$)**.**
La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 est une suite $(X_0, X_1, \dots)$ de variables aléatoires telle que

- $X_0 = 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $X_{n+1} - X_n$ est indépendante de X_0, X_1, …, X_n;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = i+1 | X_n = i\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i-1 | X_n = i\} = \frac{1}{2}$$

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\{X_n = i\} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+i}{2}}$$
pour $i \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$.
2. Quelle est la loi de $\frac{X_n+n}{2}$?
3. À l'aide de la formule de Stirling, trouver un équivalent de $\mathbb{P}\{X_n = 0\}$ pour $n \to \infty$.
4. On dit que l'état 0 est récurrent si, avec probabilité 1, la marche aléatoire revient en 0 pour un temps positif, c'est-à-dire si
$$\mathbb{P}\Big\{\exists n \geqslant 1 \colon X_n = 0\Big\} = 1$$
On admettra le résultat suivant : 0 est récurrent si et seulement si
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_n = 0\} = +\infty$$
L'état 0 est-il récurrent ?
5. Qu'en est-il si
$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = i+1 | X_n = i\} = p = 1 - \mathbb{P}\{X_{n+1} = i-1 | X_n = i\}$$
pour un $p \neq \frac{1}{2}$?