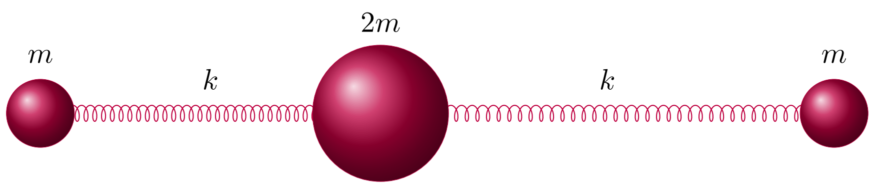
Leçon 315 : Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et de valeurs propres dans des domaines variés

Exercice 1 (Modes normaux)**.**

On considère trois masses reliées par des ressorts :



Les équations de Newton pour les déplacements x_1, x_2 et x_3 des trois masses par rapport à leurs positions d'équilibre s'écrivent

$$\begin{aligned} mx_1'' &= k(x_2 - x_1) \\ 2mx_2'' &= k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) \\ mx_3'' &= -k(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

1. Écrire ces équations sous la forme $X'' = \frac{k}{m}AX$, où $X = (x_1, x_2, x_3)^\top$ et A est une matrice 3×3.
2. Déterminer les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres v_i de A.
3. Montrer que si λ_i est une valeur propre non nulle, l'équation $X'' = \frac{k}{m}AX$ admet la solution particulière $X_i(t) = \cos(\omega_i t)v_i$ pour un ω_i fonction de λ_i qu'on déterminera.
   Interpréter ces solutions. Quelle solution correspond à la valeur propre nulle ?

Exercice 2 (Équation des ondes)**.**

Les petites vibrations d'une corde de violon ou de piano peuvent être décrites par l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

où c est la vitesse du son dans la corde. Si la corde est de longueur 1, on impose en plus les conditions

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \qquad \forall t \geqslant 0 .$$

1. Trouver une famille infinie de nombres réels λ_j et de fonctions $u_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation aux valeurs propres
$$u_j''(x) = \lambda_j u_j(x) , \qquad u_j(0) = u_j(1) = 0 .$$
2. Chercher des solutions particulières de l'équation des ondes de la forme
$$u(t,x) = f(t)u_j(x) .$$