Leçon 233 : Couples de variables aléatoires discètes. Covariance. Applications

Rappels de théorie

- Un *espace probabilisé discret* est un couple (Ω, p), où Ω est un ensemble non vide, fini ou infini dénombrable, appelé *univers*, et $p : \Omega \to [0,1]$ est une application satisfaisant
$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1 \ .$$
- Une *variable aléatoire réelle* sur (Ω, p) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Sa *loi* est l'application $f : X(\Omega) \to [0,1]$ donnée par
$$f(x) = \sum_{\omega\in\Omega\colon\, X(\omega)=x} p(\omega) =: \mathbb{P}\{X = x\} \ .$$
- L'*espérance* de X est donnée par la somme
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}\{X = x\}$$
sous réserve de convergence absolue de la série si Ω est infini. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit de manière analogue
$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{\omega\in\Omega} \varphi(X(\omega))p(\omega) = \sum_{x\in X(\Omega)} \varphi(x)\mathbb{P}\{X = x\}$$
sous réserve de convergence absolue de la série si Ω est infini.
- Si X admet une espérance, sa *variance* est définie par
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) \ .$$
On a $\operatorname{Var}(X) < \infty$ si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, et dans ce cas
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \ .$$
- Soient X, Y deux variables aléatoires sur (Ω, p). Leur *loi jointe* est l'application $f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0,1]$ donnée par
$$f(x,y) = \sum_{\omega\in\Omega\colon\, X(\omega)=x \text{ et } Y(\omega)=y} p(\omega) =: \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} \ .$$
On remarque que pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, on a
$$\mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{y\in Y(\Omega} \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} \ ,$$
$$\mathbb{P}\{Y = y\} = \sum_{x\in X(\Omega} \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} \ .$$
On dit que les lois de X et Y sont les *marginales* de la loi jointe du couple (X, Y).

- La *covariance* de X et Y est définie par

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]) \\ &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\ .\end{aligned}$$

Théorème 1. *Supposons que* $\operatorname{Var}(X)<\infty$ *et* $\operatorname{Var}(Y)<\infty$. *Alors* $\operatorname{Var}(X+Y)<\infty$, *et*

$$\operatorname{Var}(X+Y)=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)\ .$$

Théorème 2. *Si* $\operatorname{Var}(X)<\infty$ *et* $\operatorname{Var}(Y)<\infty$, *alors* $|\operatorname{cov}(X,Y)|<\infty$, *et*

$$|\operatorname{cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}\ .$$

La quantité

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}\in[-1,1]$$

s'appelle le *coefficient de corrélation* de X et Y.

Les variables X et Y sont *indépendantes* si

$$\mathbb{P}\{X=x,Y=y\}=\mathbb{P}\{X=x\}\mathbb{P}\{Y=y\}\qquad\forall(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\ .$$

Théorème 3. *Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors*

$$\operatorname{cov}(X,Y)=0\ .$$

La réciproque est fausse.

Exercices

Exercice 1. Soit $\Omega=\{-1,0,1\}$ avec $p(\omega)=1/3$ pour chaque $\omega\in\Omega$. Considérons les variables aléatoires $X(\omega)=\omega$ et $Y=|X|$.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
2. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$.

1. Préciser les lois des variables X et Y.
2. Calculer la covariance des variables X et Y. Celles-ci sont-elles indépendantes?
3. Vérifier que les variables $U=X+Y$ et $V=X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 3. Soient X,Y des variables aléatoire réelles.

1. Montrer que si $a,b\in\mathbb{R}$, alors $\operatorname{Var}(a+bX)=b^2\operatorname{Var}(X)$.
2. Montrer que $\operatorname{Var}(X)=0$ si et seulement si $\mathbb{P}\{X=\mathbb{E}(X)\}=1$.
3. Montrer que $|\rho(X,Y)|=1$ si et seulement s'il existe des nombres réels a,b tels que $\mathbb{P}\{aX+bY=c\}=1$, où $c=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(y)$.

Exercice 4. Dans une expérience consistant à jeter deux tétraèdres parfaitement symétriques, on considère les variables aléatoires X, égale à la somme des points, et Y, égale à leur différence (en valeur absolue).
Déterminer

- la loi conjointe de X et Y,
- les lois (marginales) de X et Y, leur espérance et leur variance,
- la covariance de X et Y,
- la variance de $X+Y$.

Exercice 5. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. On tire successivement k boules, sans remise ($k \leqslant r+b$).

- Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si la $i$ème boule est rouge, 0 sinon. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1, de X_2, puis de X_i pour $i = 3, \dots, k$.
- Soit $X = X_1 + \cdots + X_k$ le nombre de boules rouges tirées. Calculer son espérance, puis sa loi (loi hypergéométrique).
- Déterminer la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$, et en déduire la variance de X.

Exercice 6. Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) muni de la probabilité uniforme. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit une variable aléatoire réelle X_k en posant pour tout $\sigma \in \Omega$

$$X_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \text{ ,} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Identifier la loi de la variable X_k
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts.
4. Pour $\sigma \in \Omega$ on pose

   $$N(\sigma) = \operatorname{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \colon \sigma(k) = k\} \ .$$

   Exprimer N en fonction des X_k.
5. En déduire $\mathbb{E}(N)$ et $\operatorname{Var}(N)$.

Exercice 7. On tire deux parties A et B de $\{1, \dots, n\}$ indépendamment et selon une loi uniforme.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire $X = \operatorname{Card}(A)$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = \operatorname{Card}(A \cap B)$.
3. Même question avec $Z = \operatorname{Card}(A \cup B)$.
4. Calculer la covariance de Y et Z.