Préparation à l'agrégation interne Oréans–Tours

Leçon 229

Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli – Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

Décembre 2020

Loi de Bernoulli

- Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on écrit $X \sim \mathcal{B}(1,p)$, si l'image de X est $\{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - p$$
$$\mathbb{P}\{X = 1\} = p$$

- **Propriété :** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $A \in \mathcal{F}$ un événement. Alors $X = 1_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Exercice : Calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que la variance de X.

Loi binomiale

- On se donne $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$, et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi $\mathcal{B}(1,p)$. Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p). On écrit $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

- On a $\mathbb{P}\{S_n = k\} = p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}$ pour $k = 0, \dots, n$.

  Preuve combinatoire :

  Preuve par la fonction génératrice :

  Espérance et variance :

Approximations de la loi binomiale

- On suppose que $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour un $p \in]0,1[$. Alors

$$\hat{S}_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers une variable de loi normale centrée réduite [de Moivre et Laplace].

C'est un cas particulier du théorème limite central.

- On suppose que $S_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$ avec

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

Alors S_n converge en loi vers une variable de loi de Poisson de paramètre λ.

La loi de petits nombres

En 1898, Ladislaus Bortkiewicz nota que la loi de Poisson décrivait bien les événements rares dans de grandes populations. Il cite notamment comme exemple le nombre de décès annuels par suite de ruade de cheval dans la cavalerie prussienne, qui suit de près une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.61$:

Nombre k de décès	0	1	2	3	4
Corps de cavalerie avec k décès	109	65	22	3	1
$200 \cdot \mathcal{P}(0.61; k)$	108.67	66.28	20.21	4.11	0.63

(la valeur $\lambda = 0.61$ correspond au nombre moyen de décès par corps).

Convergence vers la loi de Poisson

Proposition

Soit $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \binom{n}{k} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \,.$$

Un résultat de convergence amélioré

Proposition

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$. Alors pour tout $A \subset \mathbb{N}$,

$$\left|\mathbb{P}\{X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \in A\}\right| \leqslant np^2$$

De plus, pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to [-M, M]$,

$$\left|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]\right| \leqslant Mnp^2$$

Le théorème de de Moivre–Laplace

Théorème [De Moivre–Laplace]

Si S_n suit la loi binomiale de paramètres (n, p), alors $\hat{S}_n = (S_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ satisfait

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{a \leqslant \hat{S}_n \leqslant b\Big\} = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$$

pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes