Leçon 227 : Fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Calculer
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) .$$
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$.

Exercice 2. Trouver les points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$$

et étudier leur nature.

Exercice 3. En effectuant le changement de variables $(u,v) = (x-y, x+y)$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui sont solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) .$$

Exercice 4 (Algorithme de Box–Müller)**.**

1. Soit $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par
$$F_1(u,v) = \sqrt{-2\ln(u)}\,\cos(2\pi v) ,$$
$$F_2(u,v) = \sqrt{-2\ln(u)}\,\sin(2\pi v) .$$
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un sous-ensemble de $[0,1] \times [0,1]$ que l'on précisera. Que valent son image et son Jacobien ?
2. Si $(x,y) = F(u,v)$, exprimer u en fonction de x et y.
3. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la densité du couple (U,V) ?
4. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On définit le couple de variables aléatoires $(X,Y) = F(U,V)$. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$. À l'aide d'un changement de variables et du théorème du transfert, calculer $\mathbb{P}\{(X,Y) \in A\} = \mathbb{P}\{(U,V) \in F^{-1}(A)\}$. Quelle est la loi du couple (X,Y) ?