Leçon 223 : Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications

Rappels de théorie

Voici les deux théorèmes sur les intégrales d'une fonction dépendant d'un paramètre figurant au programme de l'agrégation interne (Section 9.10).

Théorème 1 (Théorème de continuité)**.** *Soient $\mathcal{X}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{X} \times I \to \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $y \in I$, la fonction*

$$x \mapsto f(x, y)$$

est continue sur $\mathcal{X}$ et que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction

$$y \mapsto f(x, y)$$

est continue par morceaux sur I. S'il existe une fonction g intégrable sur I et telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $y \in I$,

$$|f(x, y)| \leqslant g(y) \ ,$$

alors la fonction $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(x) = \int_I f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

est continue sur $\mathcal{X}$.

Théorème 2 (Théorème de dérivation)**.** *Soient $\mathcal{X}$ et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{X} \times I \to \mathbb{C}$ une fonction telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction*

$$y \mapsto f(x, y)$$

est intégrable sur I. On suppose que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en tout point de $\mathcal{X} \times I$, et que pour tout $y \in I$, la fonction

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

est continue sur $\mathcal{X}$. S'il existe une fonction h intégrable sur I et telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $y \in I$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leqslant h(y) \ ,$$

alors la fonction $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(x) = \int_I f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

est dérivable sur $\mathcal{X}$ et on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, \mathrm{d}y \ .$$

Exercice 1 (Fonction Gamma d'Euler)**.**

1. Calculer, pour tout $x > 0$,
$$F(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$
2. Calculer, par récurrence, toutes les dérivées de F.
3. En déduire la valeur de
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
pour tout entier positif n.

Exercice 2. Soit
$$F(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Déterminer $F'(x)$ et calculer sa valeur, à l'aide d'une intégration par parties.
2. En déduire la valeur de $F(x)$, à une constante additive près.
3. Déterminer la valeur de cette constante en étudiant le comportement de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. Que peut-on en déduire à propos de l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\ ?$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t)\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,
$$f(x,y) = \pi \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\ .$$

Transformées de Laplace et de Fourier

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Sa transformée de Laplace est la fonction $\mathcal{L}_f$ définie par
$$\mathcal{L}_f(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$
pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que cette intégrale converge.

- La transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction $\mathcal{F}_f$ définie par
$$\mathcal{F}_f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$$
pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que cette intégrale converge.
- Si f est la densité d'une variable aléatoire réelle positive X, alors
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x$$
est égale à la transformée de Laplace $\mathcal{L}_f(-t)$. Elle est utile pour le calcul des moments $\mathbb{E}(X^n)$ de X.
- Si f est la densité d'une variable aléatoire réelle X, alors
$$\chi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx} f(x)\,\mathrm{d}x$$
est appelée fonction caractéristique de X. Elle est égale à la transformée de Fourier de f évaluée en $\xi = -t$, et sert également au calcul de moments $\mathbb{E}(X^n)$ de X.

Exercice 4 (Moments de la loi exponentielle)**.** Soit
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{1}_{\{x>0\}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
la densité d'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre 1.

Pour quels $t \in \mathbb{R}$ a-t-on $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) < \infty$? Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$ pour ces t, et en déduire $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 5 (Moments de la loi normale)**.** Soit
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
la densité d'une variable aléatoire X de loi normale centrée réduite.

1. Calculer la fonction caractéristique de X.
   Indication : on pourra utiliser la relation d'Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$, une intégration par parties, et une équation différentielle satisfaite par la fonction caractéristique.
2. En déduire $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.