Leçon 114 : Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Introduisons la notation

$$M = \big(C_1|C_2|\dots|C_n\big)$$

pour la matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont C_1, C_2, ..., C_n. On introduit trois opérations élémentaires sur les colonnes :

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ signifie qu'on multiplie la colonne C_i par $\lambda \in \mathbb{K}$;
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $i \neq j$, signifie qu'on ajoute λ fois la colonne C_j à la colonne C_i ;
3. $C_i \leftrightarrow C_j$, $i \neq j$, signifie qu'on échange la colonne i et la colonne j.

Des opération analogues peuvent être définies sur les lignes.

Les opérations sur les colonnes peuvent être représentées par des multiplications à droite de M avec des matrices dites élémentaires. (Les opérations sur les lignes admettent des représentations similaires, faisant intervenir des multiplications à gauche.)

1. Soit
$$E_{C_i \leftarrow \lambda C_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice obtenue en remplaçant le coefficient (i,i) de la matrice identité par λ. Alors pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A' = AE_{C_i \leftarrow \lambda C_i}$ est la matrice obtenue en appliquant l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à A.
2. Soit
$$E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice obtenue en remplaçant le coefficient (i,j) de la matrice identité par λ. Alors pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A' = AE_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est la matrice obtenue en appliquant l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ à A.

3. Soit
$$E_{C_i \leftrightarrow C_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice obtenue en permutant les coefficients (i,i) et (i,j) et les coefficients (j,i) et (j,j) de la matrice identité. Alors pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A' = AE_{C_i \leftrightarrow C_j}$ est la matrice obtenue en appliquant l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ à A.

Exercices

Exercice 1 (Pivot de Gauß)**.** Expliquer pourquoi, si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors il existe $r \geqslant 1$ et des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_r$ telles que

$$AE_1 \dots E_r = I_n$$

Voici une définition possible du déterminant.

Théorème 1 (Existence et unicité du déterminant)**.**
Il existe une unique application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$*, appelée* déterminant*, telle que*

- $\det$ *est linéaire par rapport à chaque colonne (les autres colonnes étant fixées) ;*
- *si* A *a deux colonnes identiques, alors* $\det A = 0$ *;*
- $\det I_n = 1$ *(où* I_n *dénote la matrice identité de dimension* n*).*

Exercice 2 (Effet d'opérations élémentaires sur les déterminants)**.**
Soit $A = (C_1|\dots|C_n) \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que

1. si A' est obtenue en effectuant l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ sur A, $\lambda \neq 0$, alors $\det A' = \lambda \det A$;
2. si A' est obtenue en effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ sur A, $i \neq j$, alors $\det A' = \det A$;
3. si A' est obtenue en effectuant l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$, $i \neq j$ sur A, alors $\det A' = -\det A$.

Exercice 3 (Déterminants des matrices élémentaires)**.** Calculer les déterminants des différentes matrices élémentaires.

Exercice 4 (Déterminant d'un produit de matrices)**.** Monter que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. On pourra distinguer les cas B inversible (non singulière) et B non inversible (singulière).