UNIVERSITÉ DU SUD TOULON - VAR

Faculté des Sciences et Techniques

Master de Mathématiques

Module M1

Les points attribués a chaque question sont notés en marges.

Durée de l'examen : 3 heures.

Première Partie

Rappel : Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n)$ est formé par les éléments $S \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ tels que $S^\top JS = J$, où $J \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R})$ est la matrice bloc

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_{\mathbb{R}^n} \\ I_{\mathbb{R}^n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Problème 1. On considère le groupe $G \equiv \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{SO}(2n) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$.

1. Montrer que G est un groupe de Lie. [2]
2. Montrer que l'algèbre de Lie de G est
$$\mathfrak{g} \equiv \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \middle| A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}),\ A + A^\top = 0,\ B = B^\top \right\}.$$
Qu'elle est la dimension de G ? [2]
3. Soit $\mathfrak{u}(\mathfrak{n})$ l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{U}(n)$. Montrer que l'application
$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{u}(\mathfrak{n}) \\ & \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} & \mapsto & A + iB \end{array}$$
est un isomorphisme d'algèbre de Lie. [2]
4. Montrer que G est localement isomorphe à $\mathrm{U}(n)$. [2]

Problème 2. Soit G un groupe de Lie connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Montrer que pour la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, (rappel : $\mathrm{Ad}_a X \equiv aXa^{-1}$) on a

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) \equiv \{a \in G \,|\, \mathrm{Ad}_a = \mathrm{Id}\} = \mathrm{Z}(G),$$

où $\mathrm{Z}(G)$ est le centre de G. (Indication : utiliser le fait que tout élément $b \in G$ peut s'écrire $b = \mathrm{e}^{X_1}\mathrm{e}^{X_2} \cdots \mathrm{e}^{X_n}$ avec $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$.) [4]

(Tourner S.V.P)