Faculté des Sciences et Techniques

Master de Mathématiques

Module M1

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Les points attribués a chaque question sont notés en marges.

Durée de l'examen : 3 heures.

Première Partie

Problème 1. On considère le sous-ensemble de $SL(3,\mathbb{R})$ défini par

$$G \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

.

1. Montrer que G est un groupe de Lie (c'est le groupe de Heisenberg). [1]
2. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Montrer que pour $X \in \mathfrak{g}$ on a

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & a(t) & b(t) \\ 0 & 1 & c(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où les fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ satisfont les équations fonctionnelles

$$\begin{aligned} a(t+s) &= a(t) + a(s), \\ b(t+s) &= b(t) + b(s) + a(t)c(s), \\ c(t+s) &= c(t) + c(s), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $a(0) = b(0) = c(0) = 0$. En déduire que

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha t, \\ b(t) &= \beta t + \tfrac{1}{2}\alpha\gamma t^2, \\ c(t) &= \gamma t, \end{aligned}$$

où α, β et γ sont des constantes réelles arbitraires. [2]

3. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que les matrices

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Qu'elle est la dimension du groupe G ? [1]

4. Montrer que pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{\alpha A+\beta B+\gamma C} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta + \frac{1}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclure que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans G. En quoi ce résultat est-il remarquable ? [2]

5. G est-il connexe, simplement connexe ? [2]

6. Déterminer relativement à la base $\{A, B, C\}$ les matrices ad_A, ad_B et ad_C de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. [2]

(Tourner S.V.P)