

34e congrès MATh.en.JEANS

Université de Pau et des Pays de l'Adour

# Combien de lampes pour éclairer un labyrinthe de miroirs ?

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans, France



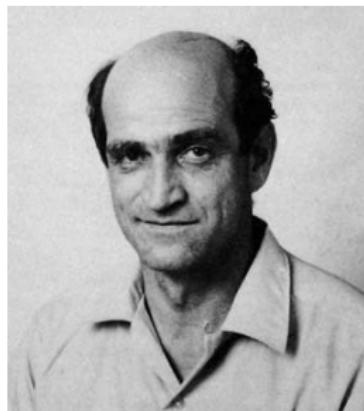
31 mars et 1er avril 2023

# Le problème d'éclairage (ou d'illumination)

**Question:** (Ernst G. Straus, ~1950)

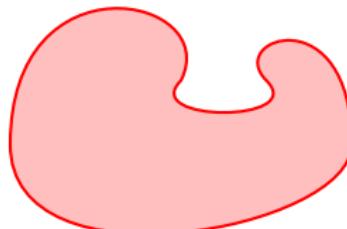
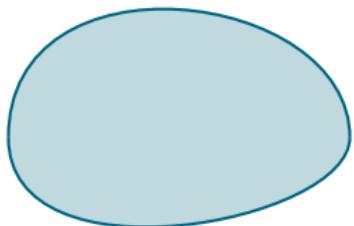
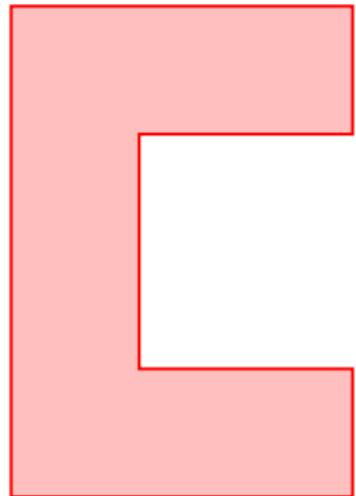
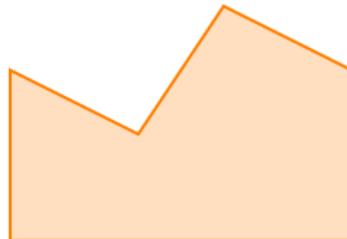
Une pièce aux murs recouverts de miroirs peut-elle toujours être éclairée entièrement par une unique source lumineuse ?

- ▷ La pièce doit être d'un seul tenant (connexe)
- ▷ La lumière se propage en ligne droite (pas de diffraction)

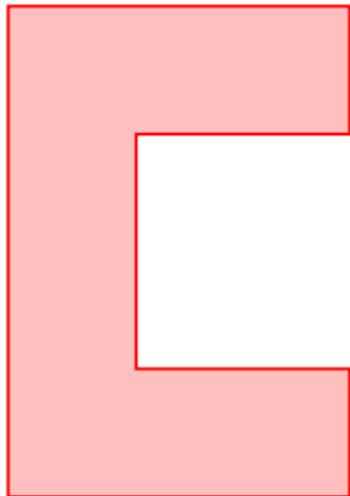
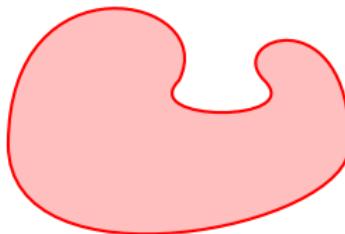
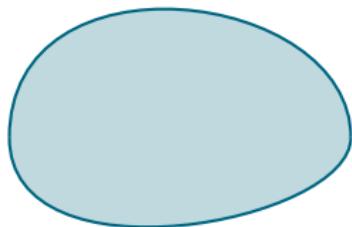
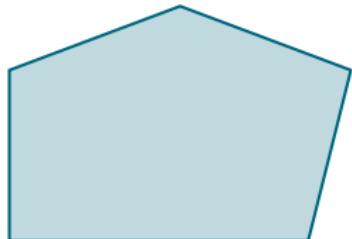


Ernst G. Straus (1922–1983)

## Sans miroirs sur les murs

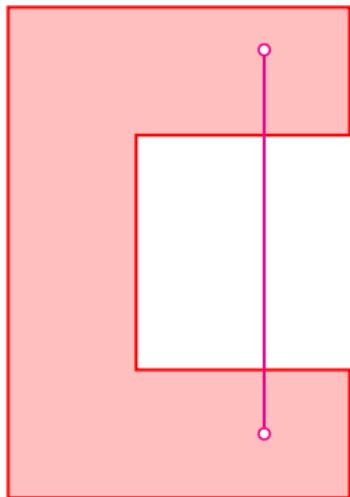
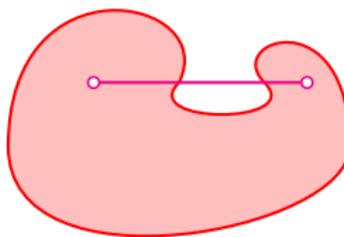
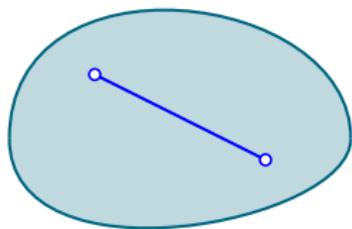
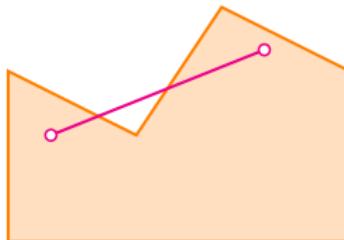
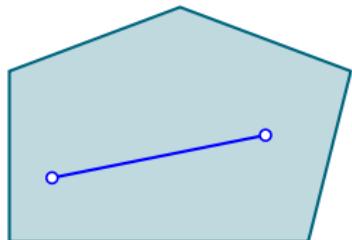


## Sans miroirs sur les murs



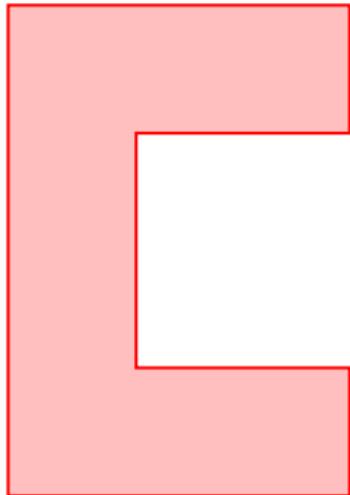
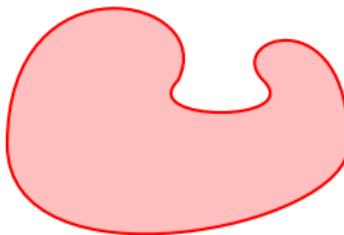
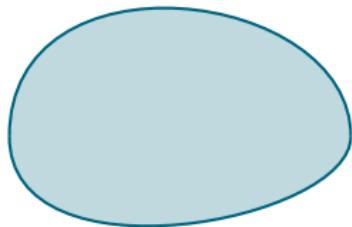
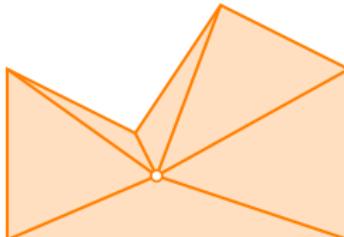
- ▷ Un polygone est **convexe** si tous ses angles sont inférieurs à  $180^\circ$

## Sans miroirs sur les murs



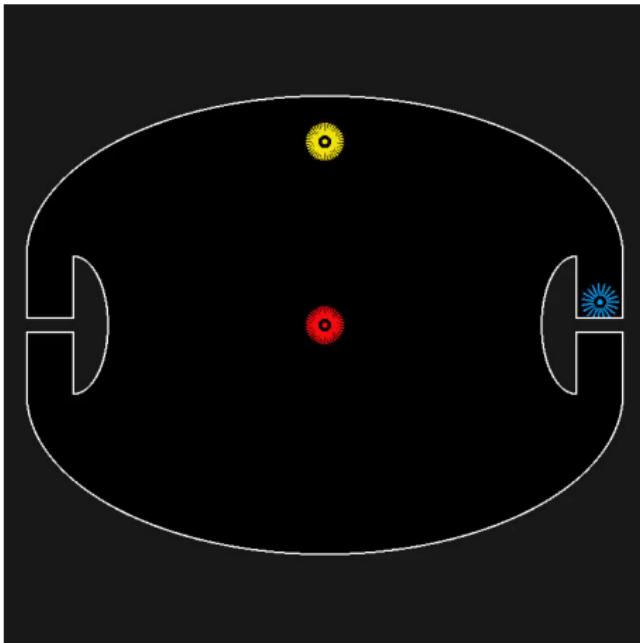
- ▷ Un polygone est **convexe** si tous ses angles sont inférieurs à  $180^\circ$
- ▷ Un domaine  $D$  du plan est **convexe** s'il contient tout segment reliant deux points de  $D$  — Il peut alors être éclairé depuis tout point

# Sans miroirs sur les murs



- ▷ Un polygone est **convexe** si tous ses angles sont inférieurs à  $180^\circ$
- ▷ Un domaine  $D$  du plan est **convexe** s'il contient tout segment reliant deux points de  $D$  — Il peut alors être éclairé depuis tout point
- ▷ Un domaine est **étoilé** s'il peut être éclairé depuis un point au moins
- ▷ Un domaine **non étoilé** ne peut pas être éclairé avec une seule lampe

# La solution de Penrose (1958)



(En ligne : <https://youtu.be/dWMuQt8Bdvk>)

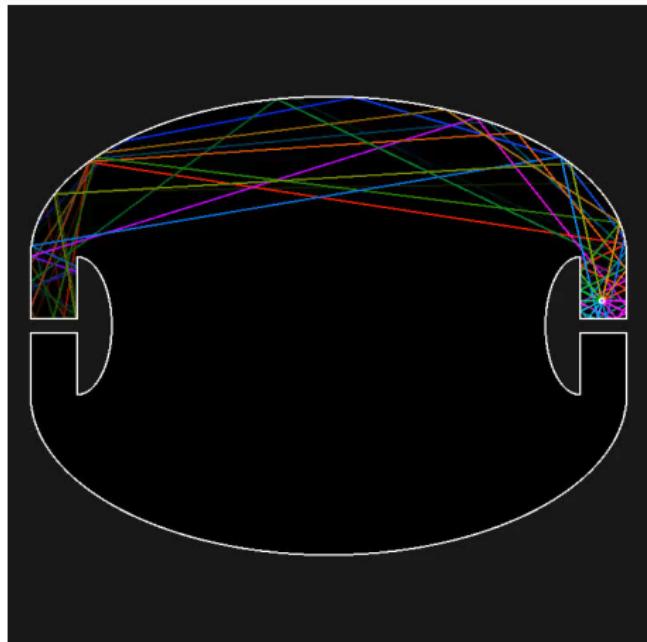
Combien de lampes pour éclairer un labyrinthe de miroirs ?



Roger Penrose  
(né en 1931)

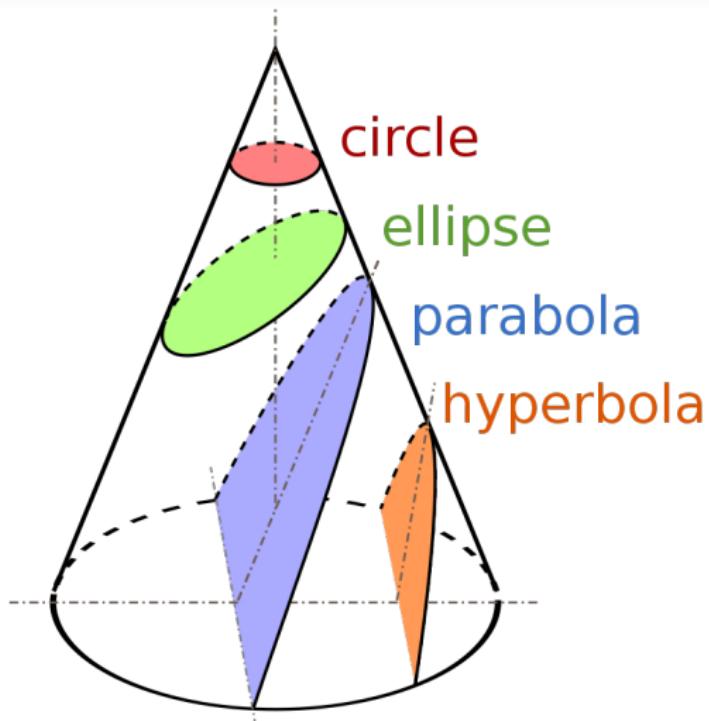
Source : Cirone-Musi,  
Festival della Scienza, CC BY-SA 2.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19318743>

# La solution de Penrose



(En ligne : [https://youtu.be/LXej5rQq\\_Bc](https://youtu.be/LXej5rQq_Bc))

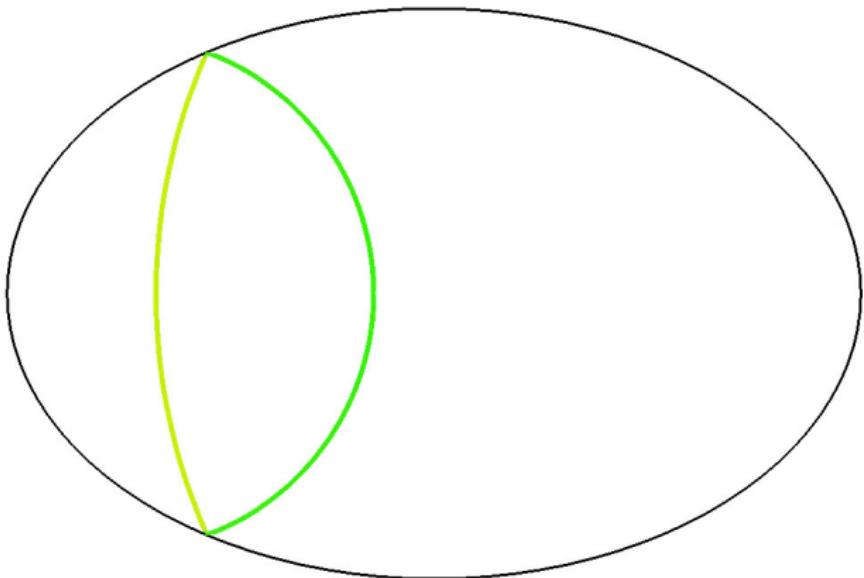
# Les ellipses sont des sections coniques



Source : Magister\_Mathematicae – Own work based on: Secciones cónicas.svg, CC BY-SA 3.0  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18556148>

# Billard dans une ellipse

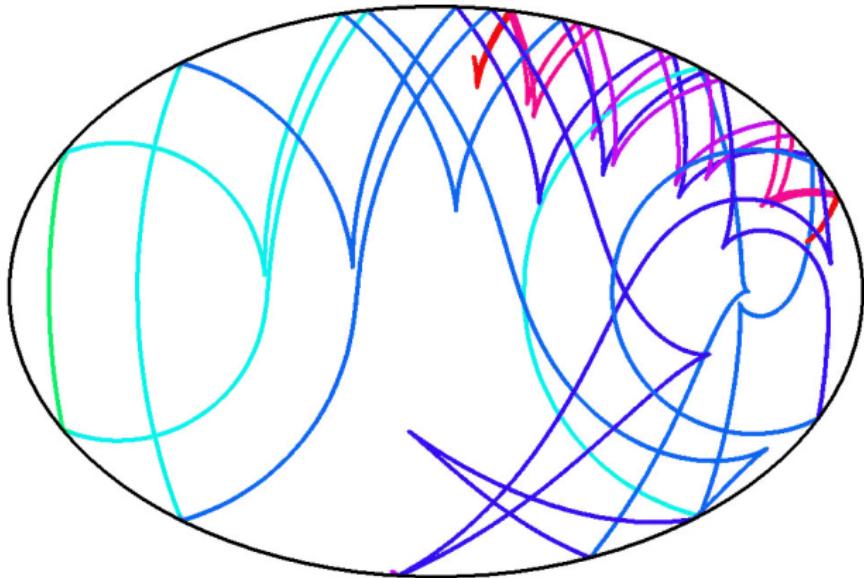
Le rôle des foyers :



(En ligne : <https://youtu.be/-aZ-GiAXh3U>)

# Billard dans une ellipse

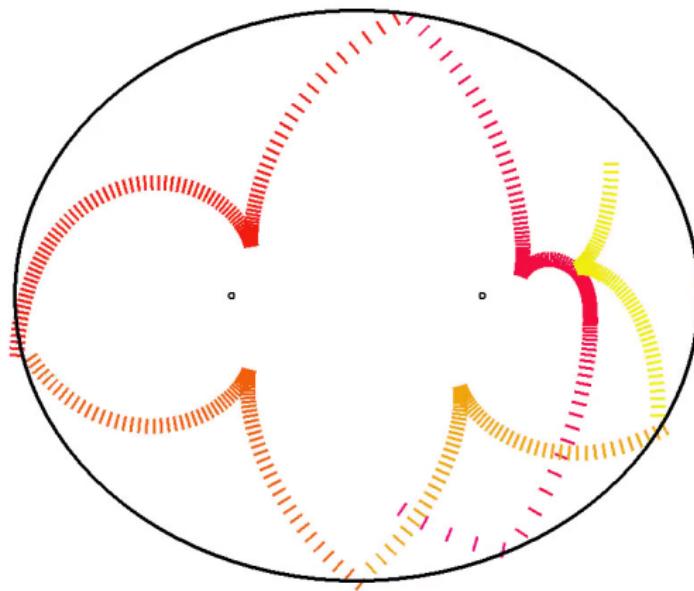
En partant d'un autre point qu'un foyer :



(En ligne : [https://youtu.be/\\_rehos34lKA](https://youtu.be/_rehos34lKA))

# Billard dans une ellipse

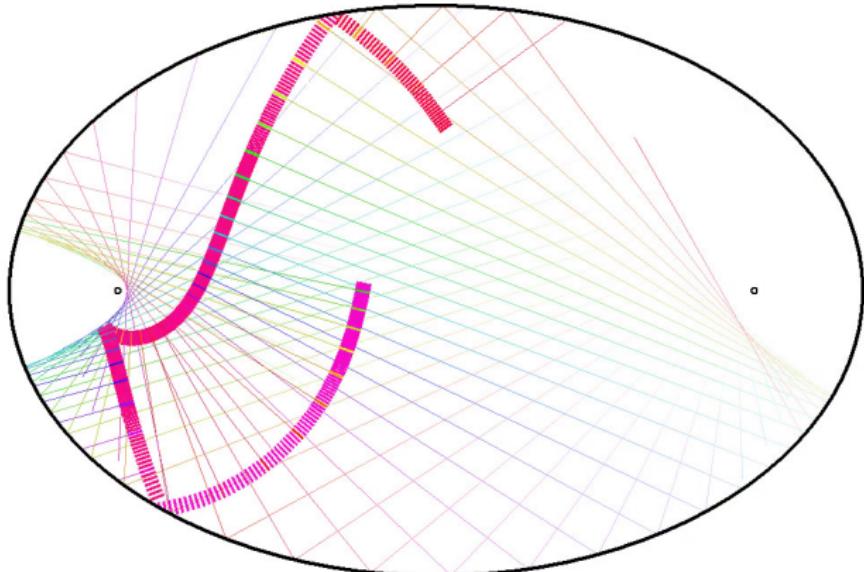
Trajectoires à l'extérieur des foyers :



(En ligne : <https://youtu.be/Hi2ShwiPtWU>)

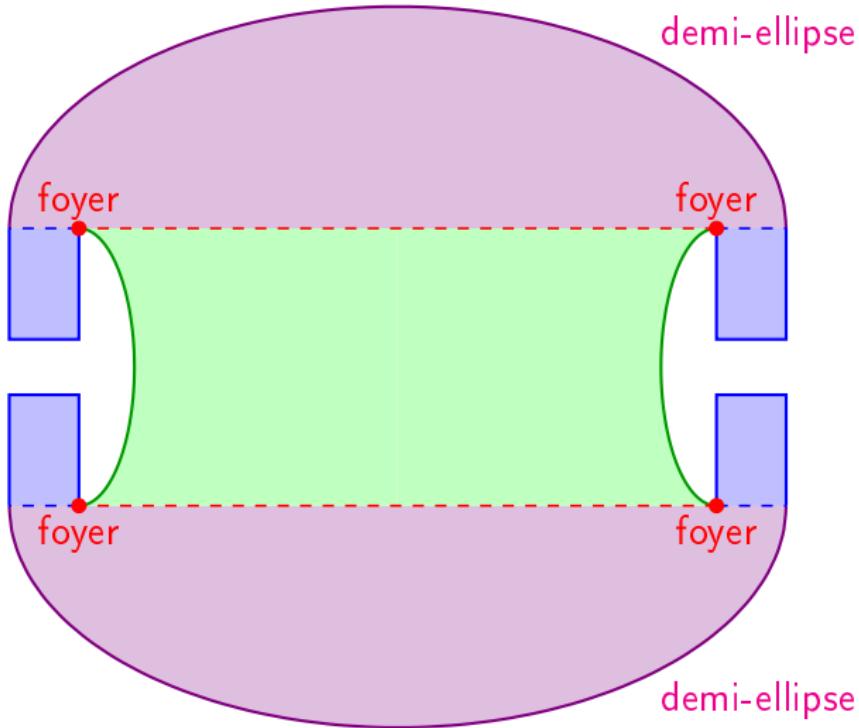
# Billard dans une ellipse

Trajectoires à l'intérieur des foyers :

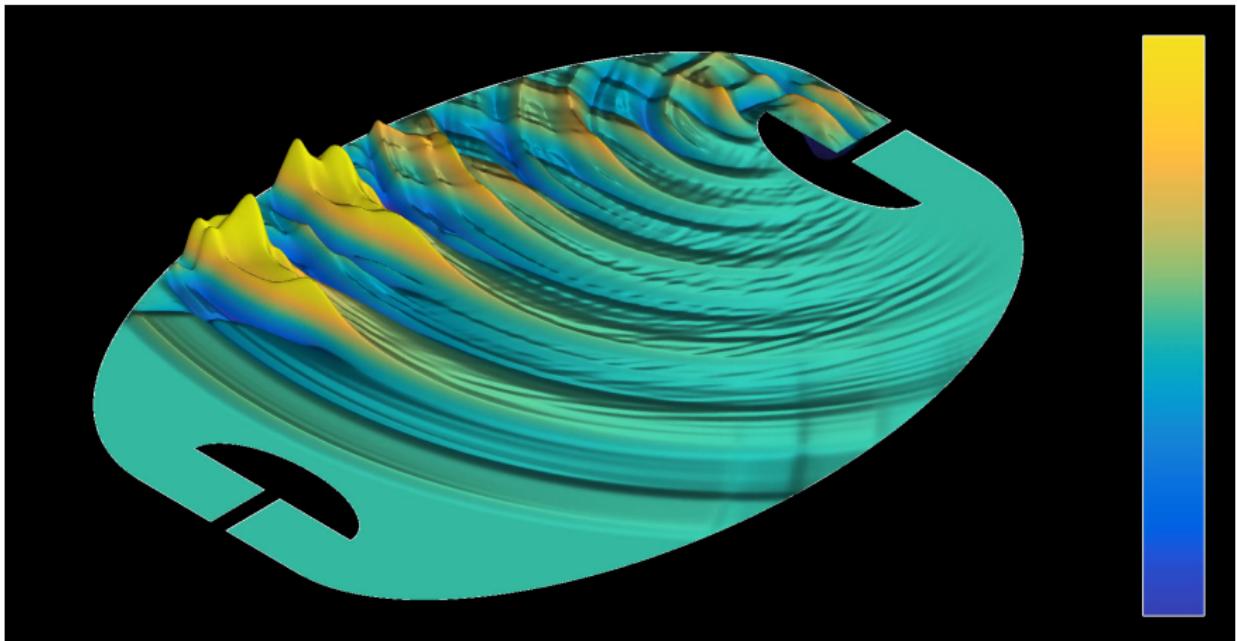


(En ligne : <https://youtu.be/2NLtpcyuR08>)

# La solution de Penrose



# Diffraction et interférences



(En ligne : [https://youtu.be/hwoj\\_8RGoSE](https://youtu.be/hwoj_8RGoSE))

# Existe-t-il des solutions polygonales ?

# Existe-t-il des solutions polygonales ?

- ▷ George Tokarsky, 1995 :  
Polygone à 26 côtés
- ▷ David Castro, 1997 :  
Polygone à 24 côtés

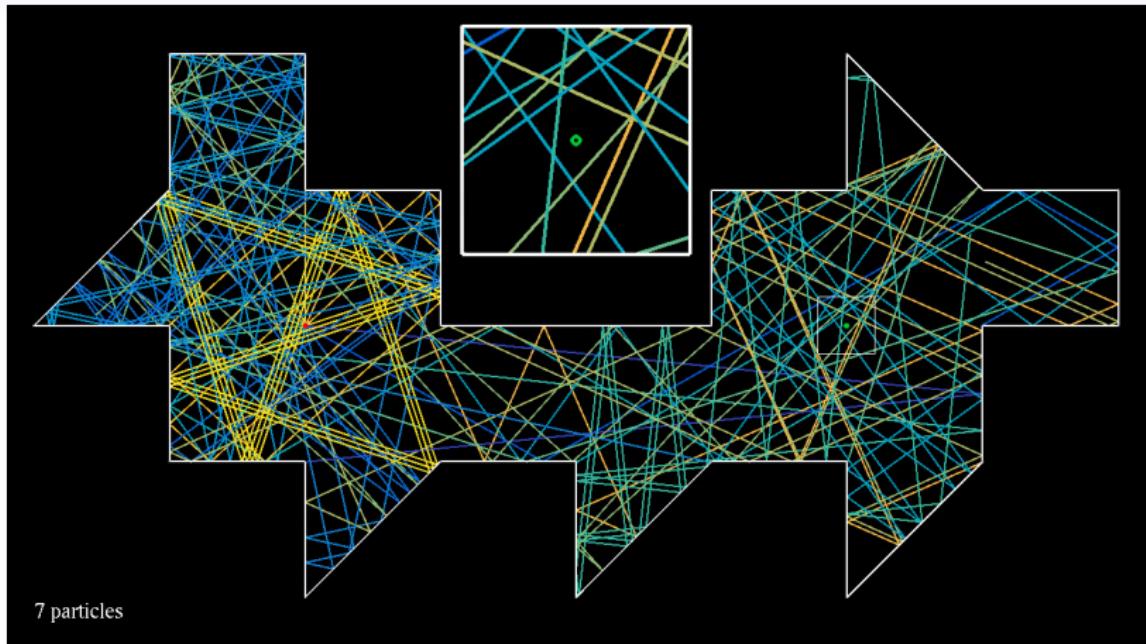


# Existe-t-il des solutions polygonales ?

- ▷ George Tokarsky, 1995 :  
Polygone à 26 côtés
- ▷ David Castro, 1997 :  
Polygone à 24 côtés
- ▷ Samuel Lelièvre, Thierry Monteil & Barak Weiss, 2016 :  
Dans un polygone à angles rationnels (en degrés), au plus un nombre fini de points peut ne pas être éclairé
- ▷ Amit Wolecki, 2019 :  
Le nombre de paires de points qui ne s'éclairent pas mutuellement est fini

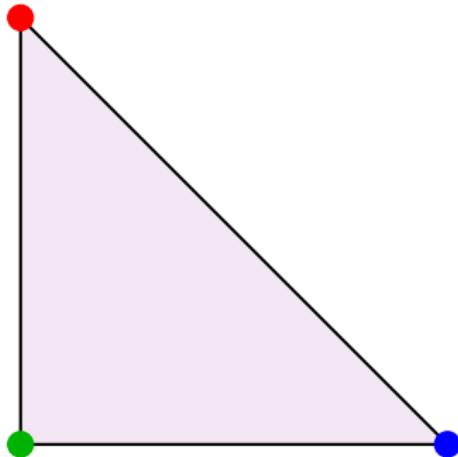


# La solution de Tokarsky (1995)



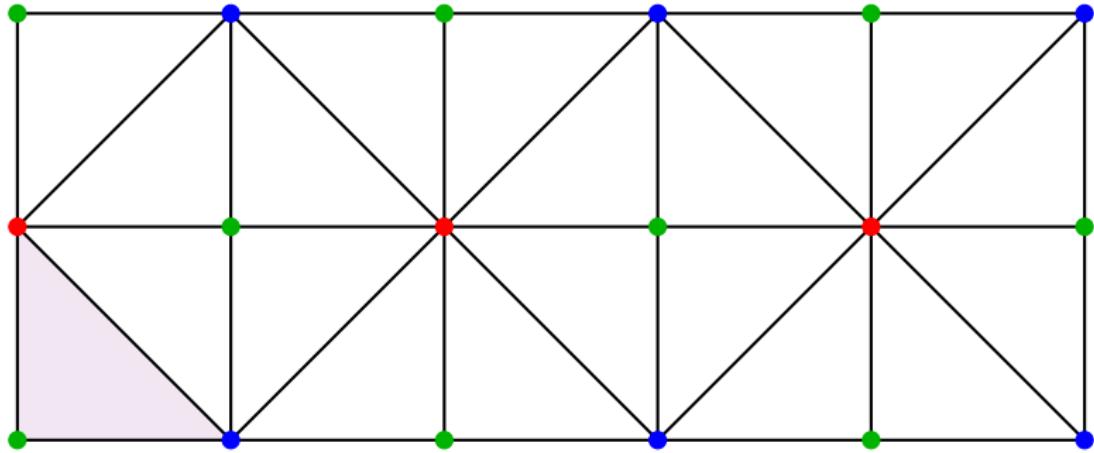
(En ligne : <https://youtu.be/Hu1-oDVFwSc>)

# Le billard dans un triangle rectangle isocèle

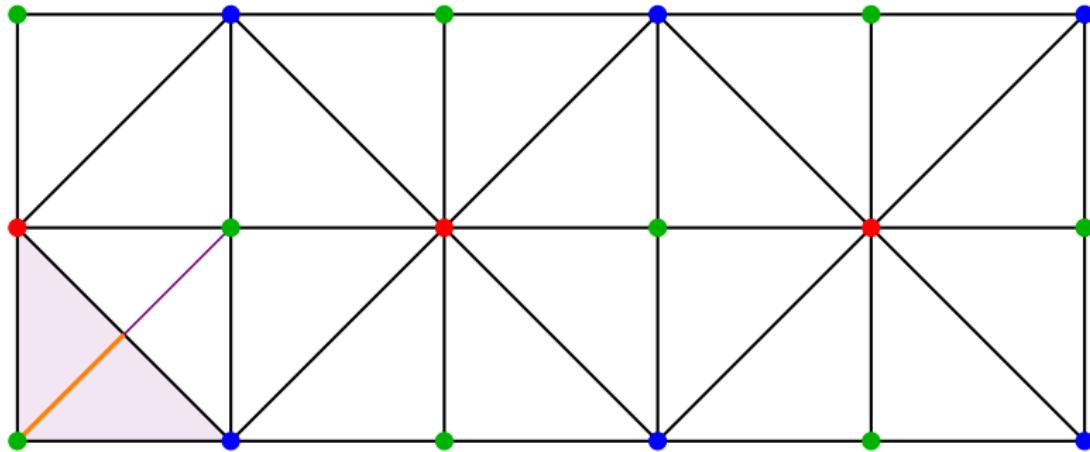


Existe-t-il des trajectoires partant d'un coin, et arrivant dans un coin (le même ou un autre) ?

# Dépliage et repliage

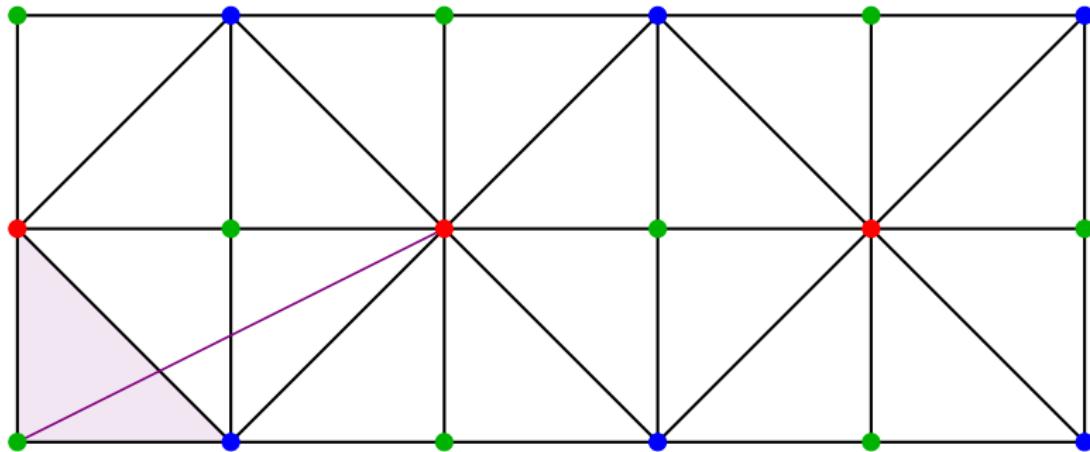


# Dépliage et repliage



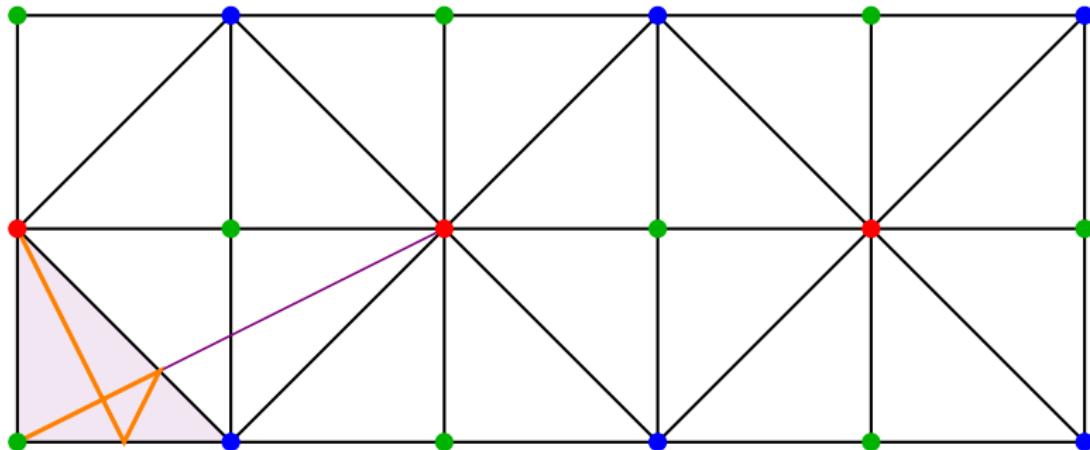
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible

# Dépliage et repliage



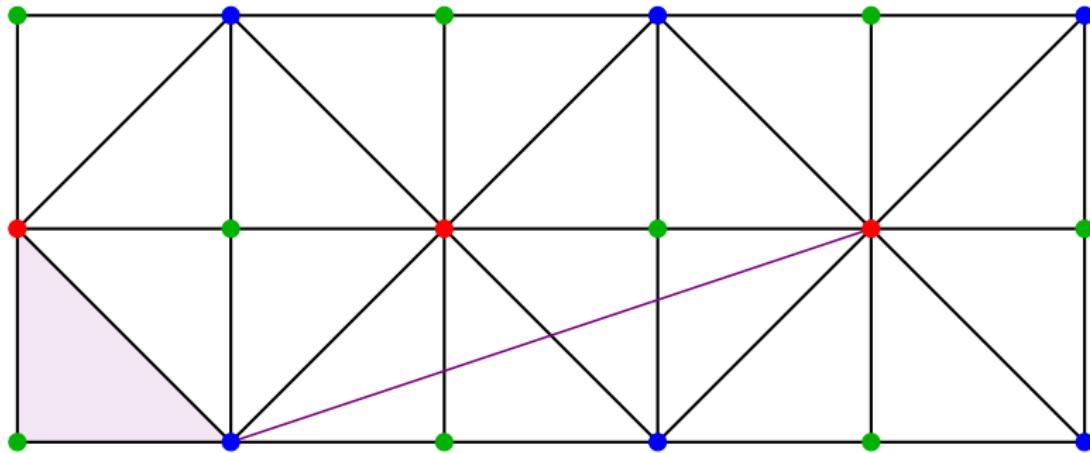
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) :

# Dépliage et repliage



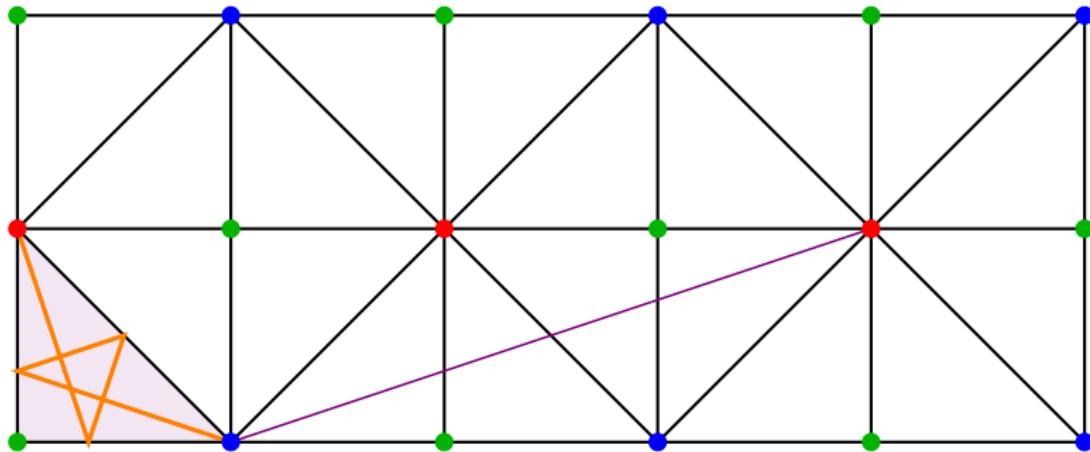
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) : possible

# Dépliage et repliage



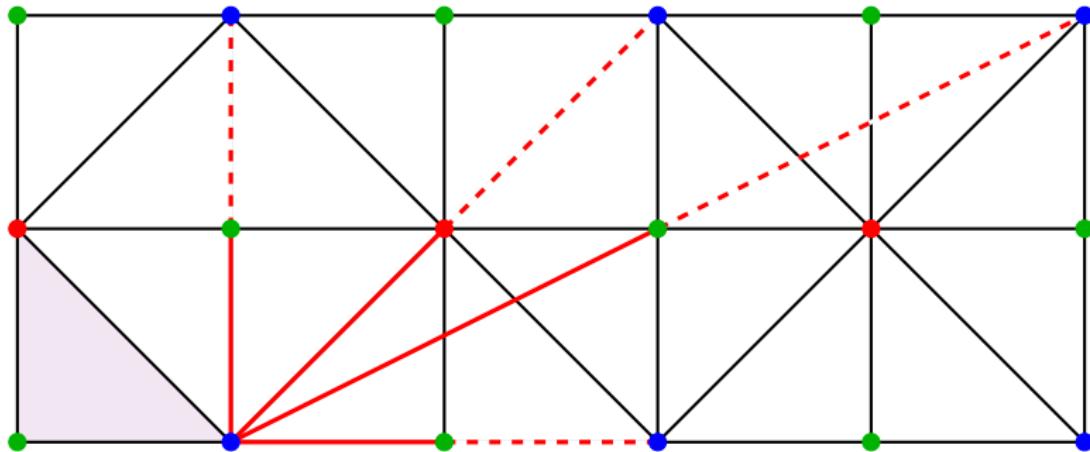
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) : possible
- ▷ Relier le coin bleu au coin rouge :

# Dépliage et repliage



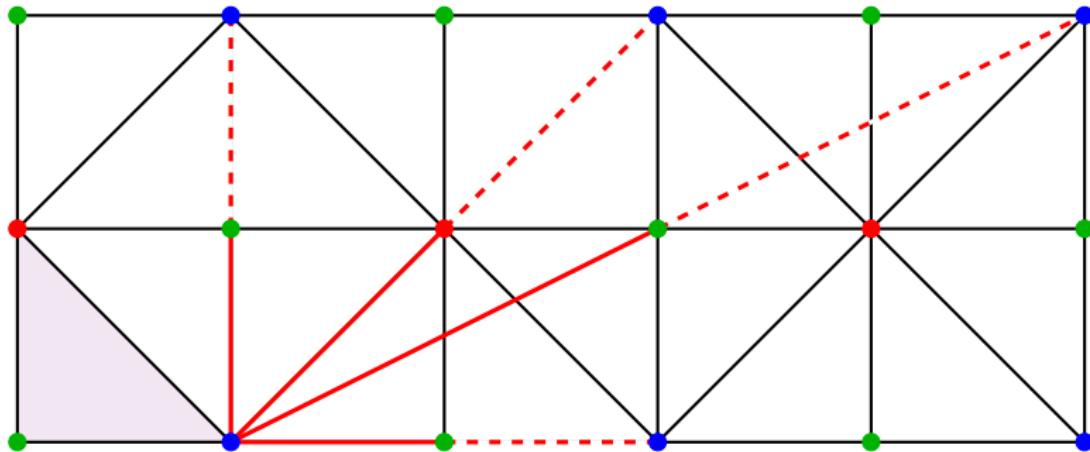
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) : possible
- ▷ Relier le coin bleu au coin rouge : possible

# Dépliage et repliage



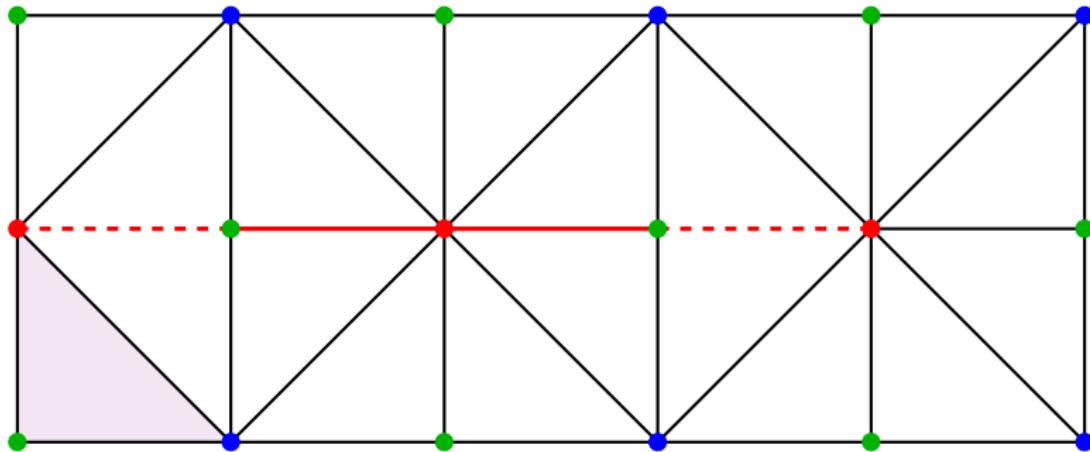
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) : possible
- ▷ Relier le coin bleu au coin rouge : possible
- ▷ Relier le coin bleu à lui-même :

# Dépliage et repliage



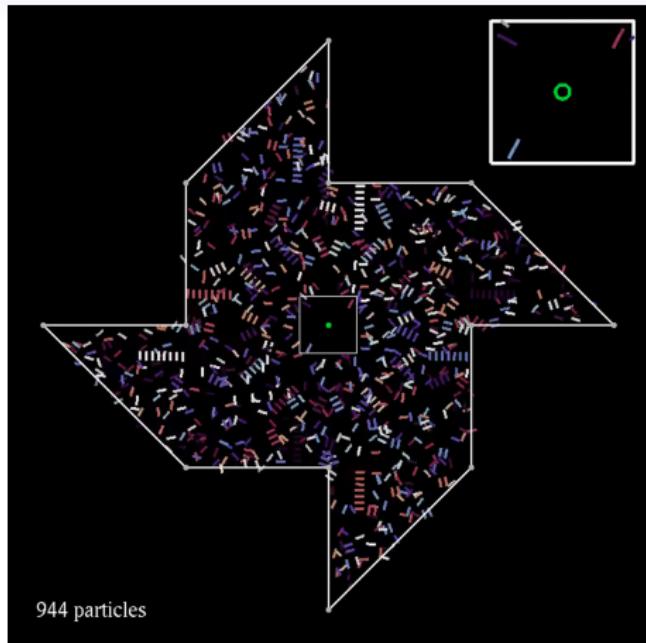
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) : possible
- ▷ Relier le coin bleu au coin rouge : possible
- ▷ Relier le coin bleu à lui-même : impossible

# Dépliage et repliage



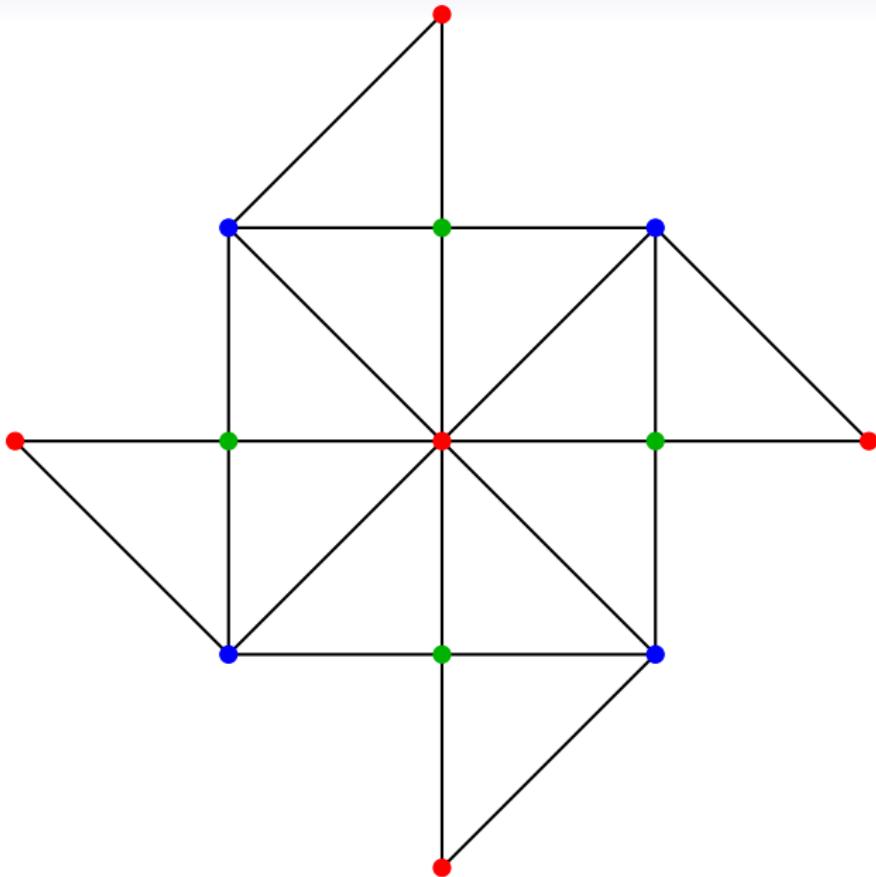
- ▷ Relier le coin vert à lui-même : possible
- ▷ Relier le coin vert au coin rouge (ou bleu) : possible
- ▷ Relier le coin bleu au coin rouge : possible
- ▷ Relier le coin bleu à lui-même : impossible
- ▷ Relier le coin rouge à lui-même : impossible

# Le « moulin à vent en papier »



(En ligne : <https://youtu.be/yiWfmjp8w-k>)

# Le « moulin à vent en papier »

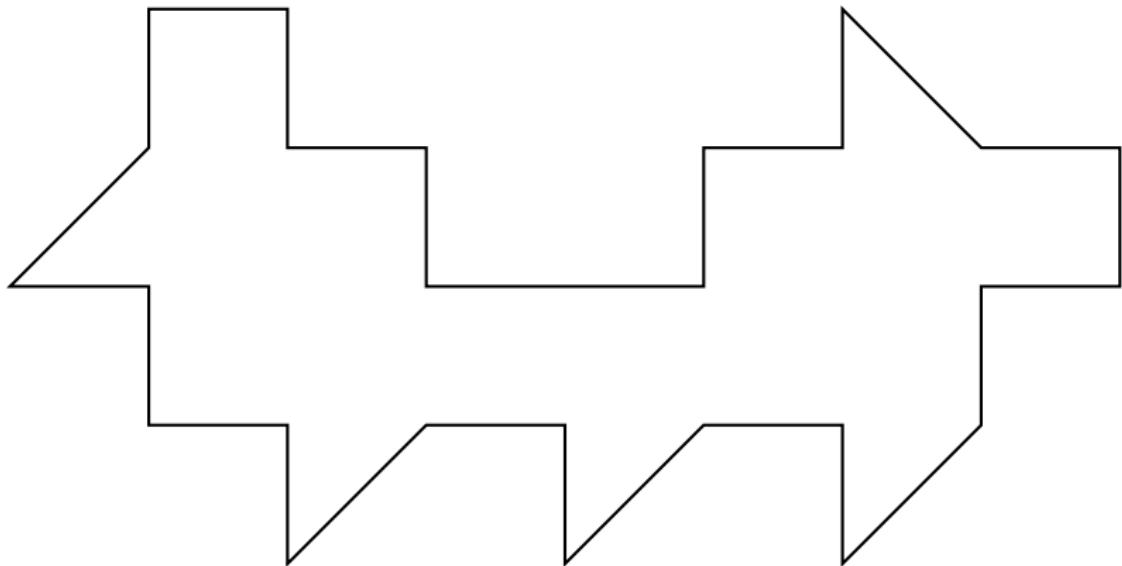


Combien de lampes pour éclairer un labyrinthe de miroirs ?

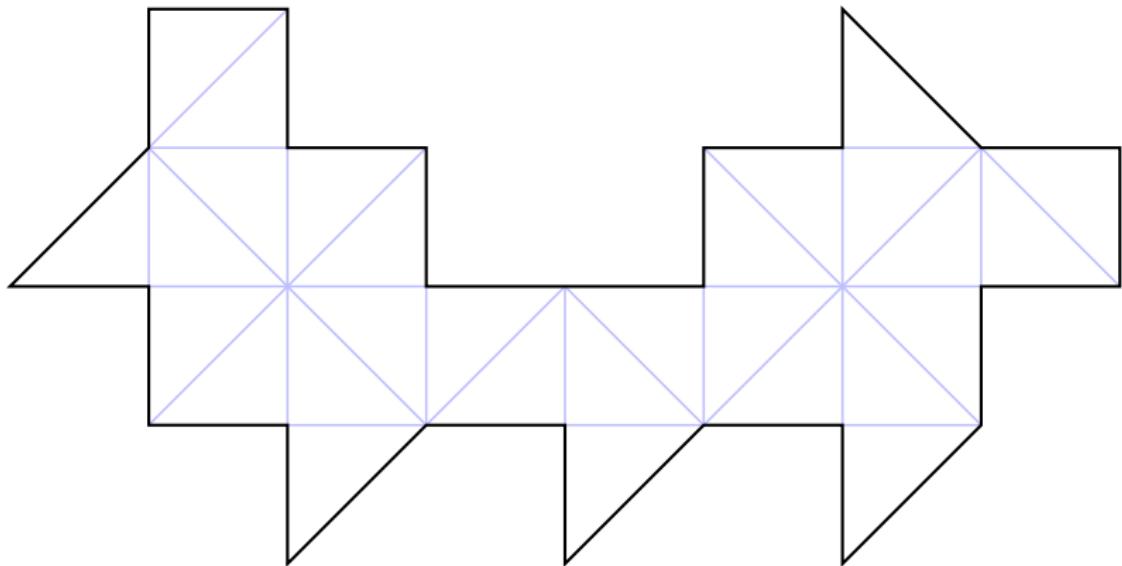
31 mars et 1er avril 2023

17/33

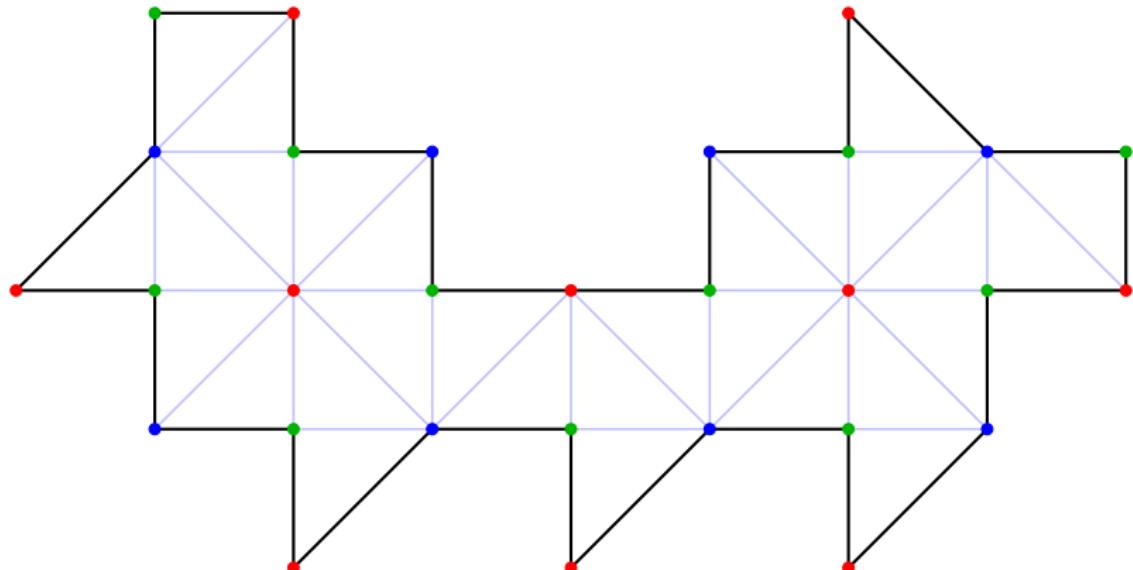
# La solution de Tokarsky (1995)



# La solution de Tokarsky (1995)

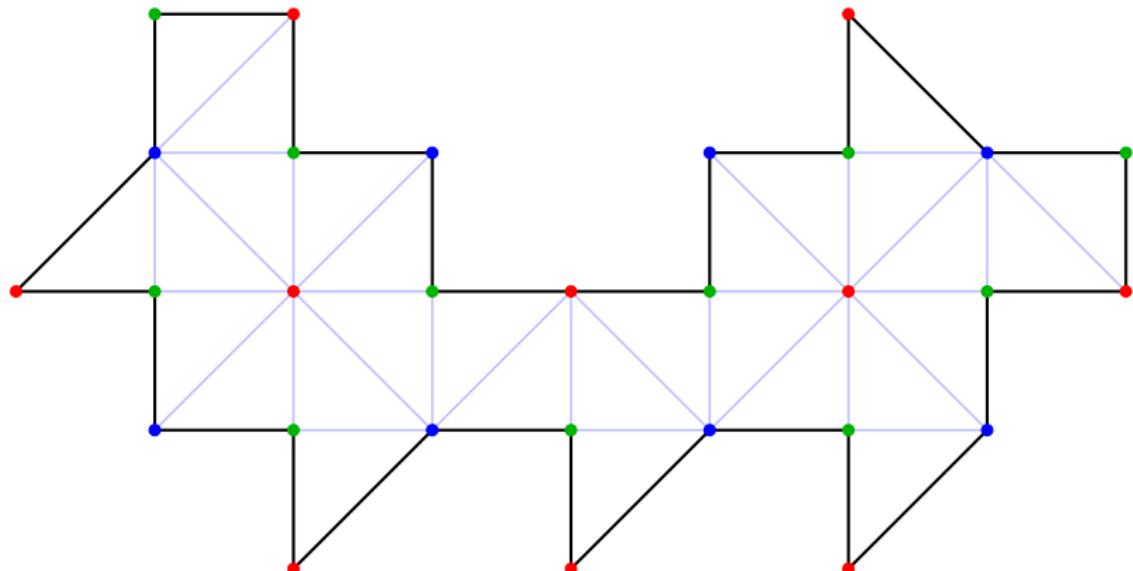


# La solution de Tokarsky (1995)



Partant d'un point **rouge**, il est **impossible** d'arriver à un autre point **rouge**

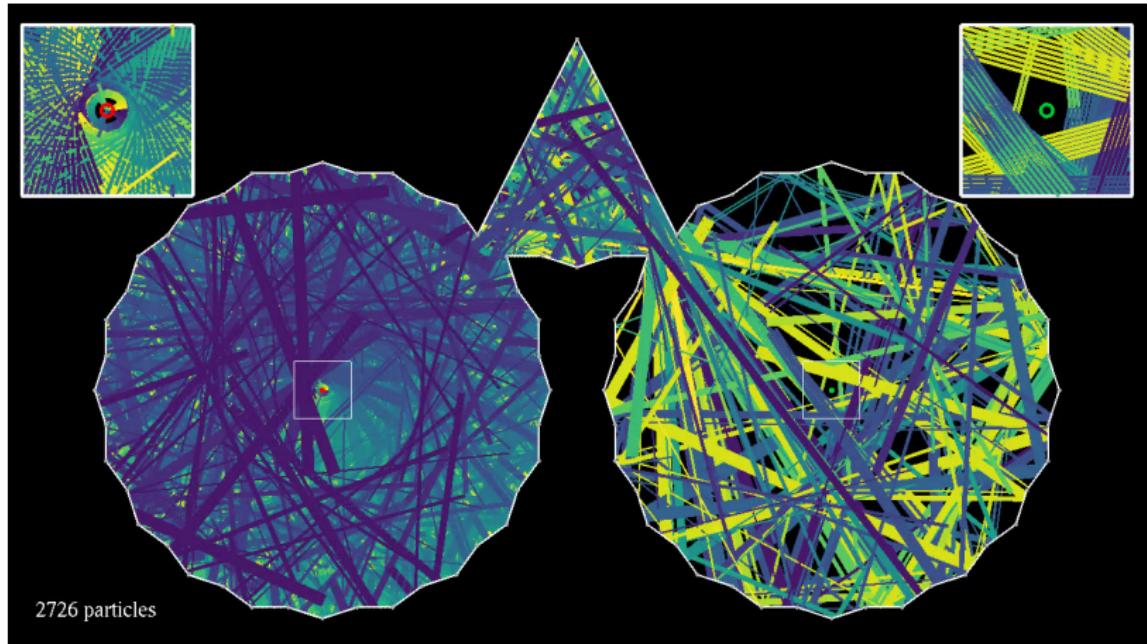
# La solution de Tokarsky (1995)



Partant d'un point **rouge**, il est **impossible** d'arriver à un autre point **rouge**

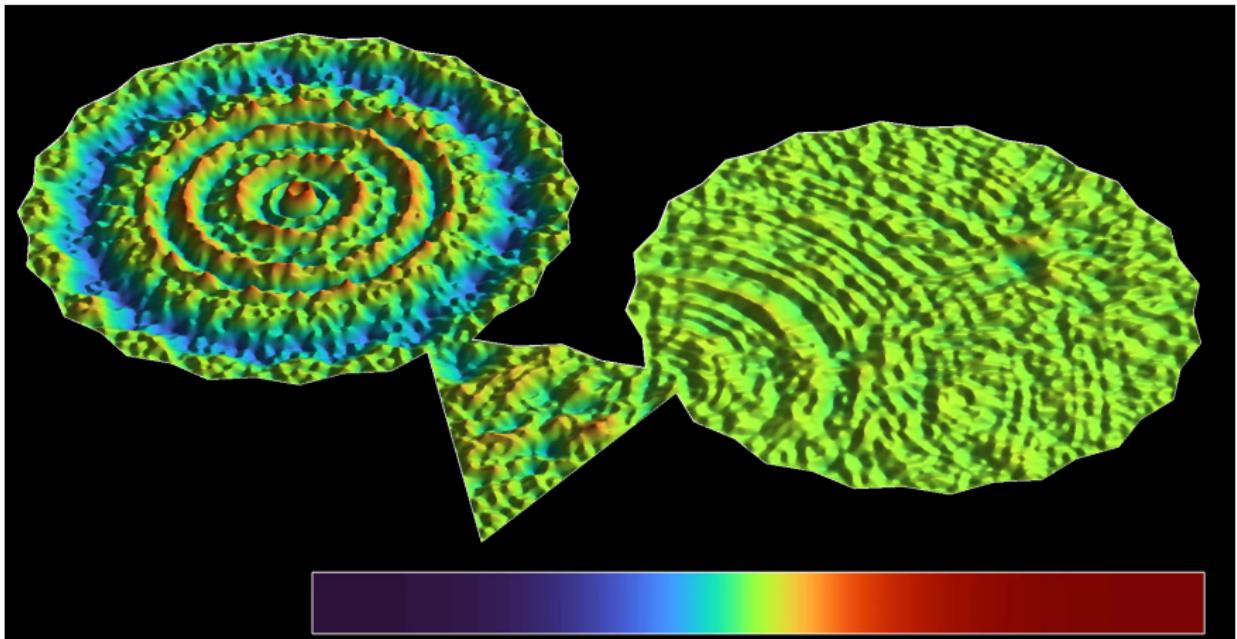
⚠ Il faut s'assurer que tous les **points bloquants** (**verts** et **bleus**) soient bien des coins

# Une pièce sans angle droit avec un point inilluminable



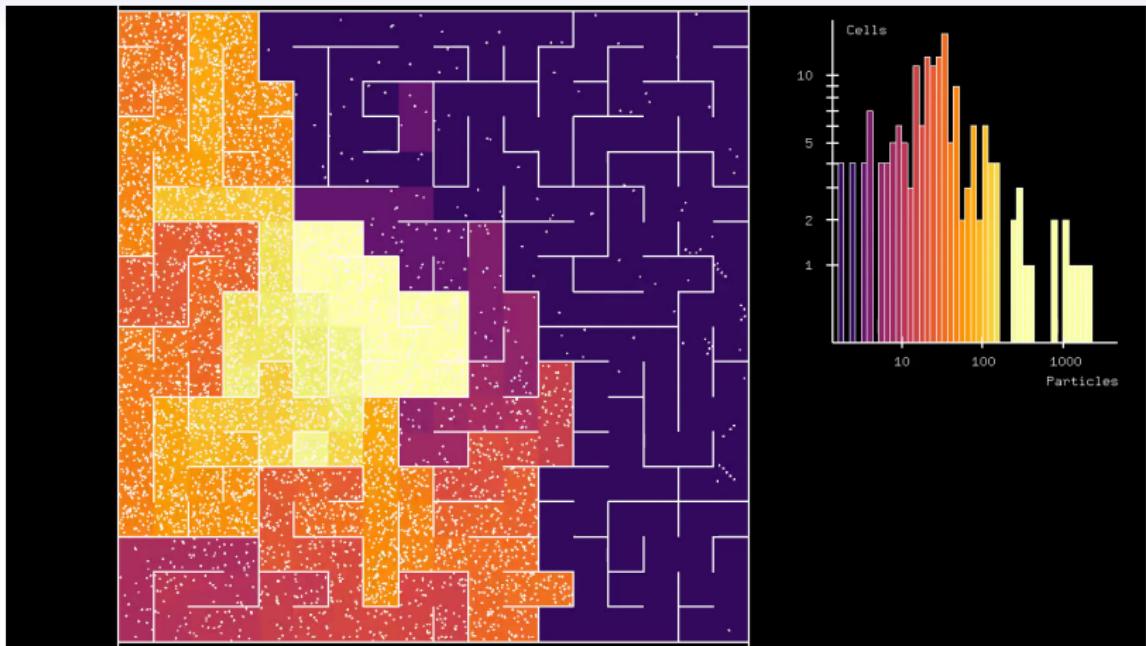
(En ligne : <https://youtu.be/7G0nL31qpaM>)

# Diffraction et interférences



(En ligne : <https://youtu.be/Ii41p06w0gs>)

# Explorer un labyrinthe



**Théorème :** [Samuel Lelièvre, Thierry Monteil & Barak Weiss, 2016]

Dans un polygone à angles rationnels (en degrés), au plus un nombre fini de points peut ne pas être éclairé

# À quoi ça sert ?

# À quoi ça sert ? 1 – Équations différentielles

- ▷ De nombreux phénomènes naturels sont décrits par des équations différentielles

# À quoi ça sert ? 1 – Équations différentielles

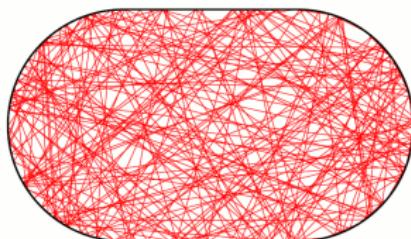
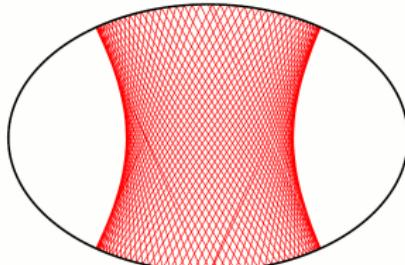
- ▷ De nombreux phénomènes naturels sont décrits par des équations différentielles
- ▷ Ces équations admettent rarement des solutions explicites (exceptions : oscillateur harmonique, problème à deux corps, ...)

# À quoi ça sert ? 1 – Équations différentielles

- ▷ De nombreux phénomènes naturels sont décrits par des équations différentielles
- ▷ Ces équations admettent rarement des solutions explicites (exceptions : oscillateur harmonique, problème à deux corps, ...)
- ▷ Alternatives :
  - ◊ Simulations numériques
  - ◊ Théorie des perturbations  
(problème à trois corps, découverte de Neptune par Le Verrier)
  - ◊ Étude qualitative, propriétés géométriques

# À quoi ça sert ? 1 – Équations différentielles

- ▷ De nombreux phénomènes naturels sont décrits par des équations différentielles
- ▷ Ces équations admettent rarement des solutions explicites (exceptions : oscillateur harmonique, problème à deux corps, ...)
- ▷ Alternatives :
  - ◊ Simulations numériques
  - ◊ Théorie des perturbations  
(problème à trois corps, découverte de Neptune par Le Verrier)
  - ◊ Étude qualitative, propriétés géométriques
- ▷ Les billards : particule réfléchie sur les bords d'une enceinte  
Selon sa forme, le mouvement peut être régulier, chaotique, mixte...



## À quoi ça sert ? 2 – Physique statistique

- ▷ Une mole de gaz contient environ  $6 \cdot 10^{23}$  molécules  
Beaucoup trop pour les décrire individuellement

## À quoi ça sert ? 2 – Physique statistique

- ▷ Une mole de gaz contient environ  $6 \cdot 10^{23}$  molécules  
**Beaucoup trop** pour les décrire individuellement
- ▷ La **thermodynamique** en donne une description à notre échelle  
**Exemple :** Loi des gaz parfaits  $pV = nRT$

## À quoi ça sert ? 2 – Physique statistique

- ▷ Une mole de gaz contient environ  $6 \cdot 10^{23}$  molécules  
**Beaucoup trop** pour les décrire individuellement
- ▷ La **thermodynamique** en donne une description à notre échelle  
**Exemple :** Loi des gaz parfaits  $pV = nRT$
- ▷ La **physique statistique** explique la thermodynamique, si l'on suppose qu'une **hypothèse ergodique** est vraie

### Hypothèse ergodique

Les **moyennes temporelles** des observables tendent vers leurs **moyennes spatiales** (compatibles avec les lois de conservation, telles que l'énergie)

## À quoi ça sert ? 2 – Physique statistique

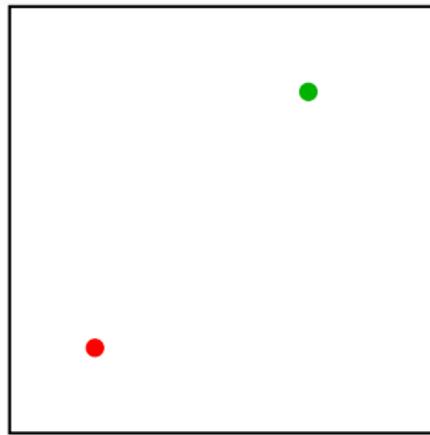
- ▷ Une mole de gaz contient environ  $6 \cdot 10^{23}$  molécules  
Beaucoup trop pour les décrire individuellement
- ▷ La **thermodynamique** en donne une description à notre échelle  
**Exemple :** Loi des gaz parfaits  $pV = nRT$
- ▷ La **physique statistique** explique la thermodynamique, si l'on suppose qu'une **hypothèse ergodique** est vraie

### Hypothèse ergodique

Les **moyennes temporelles** des observables tendent vers leurs **moyennes spatiales** (compatibles avec les lois de conservation, telles que l'énergie)

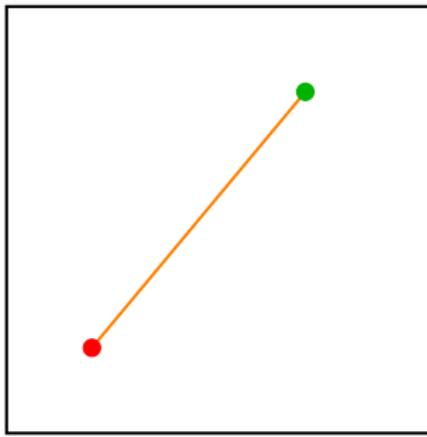
- ▷ L'**hypothèse ergodique** généralise le problème de l'éclairage.  
Elle a pu être démontrée pour certains billards

# Un duel au laser



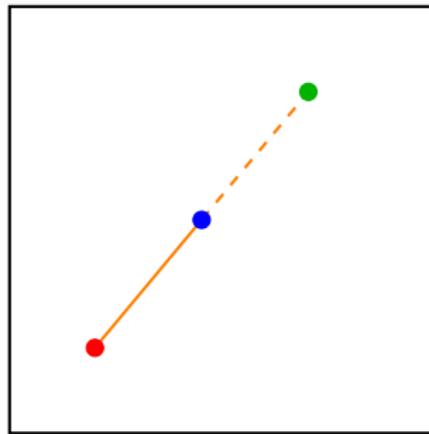
- ▷ Un **tireur** et une **cible** s'affrontent dans une pièce carrée garnie de miroirs

# Un duel au laser



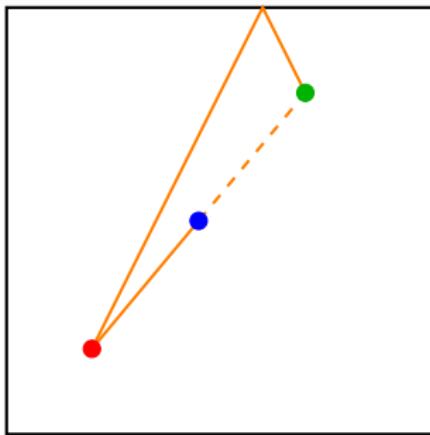
- ▷ Un **tireur** et une **cible** s'affrontent dans une pièce carrée garnie de miroirs

# Un duel au laser



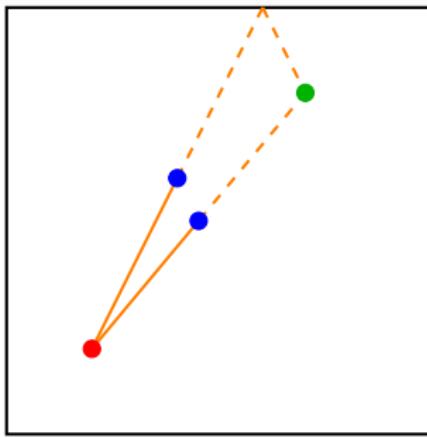
- ▷ Un **tireur** et une **cible** s'affrontent dans une pièce carrée garnie de miroirs
- ▷ La **cible** peut se protéger avec des **obstacles**

# Un duel au laser



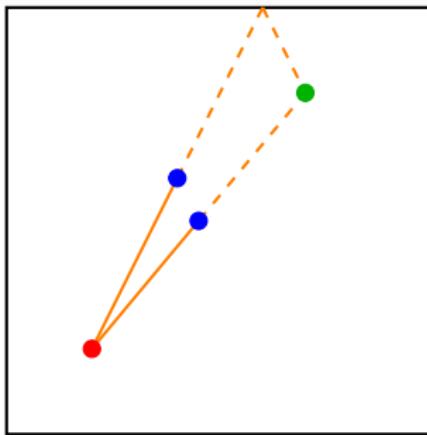
- ▷ Un **tireur** et une **cible** s'affrontent dans une pièce carrée garnie de miroirs
- ▷ La **cible** peut se protéger avec des **obstacles**

# Un duel au laser



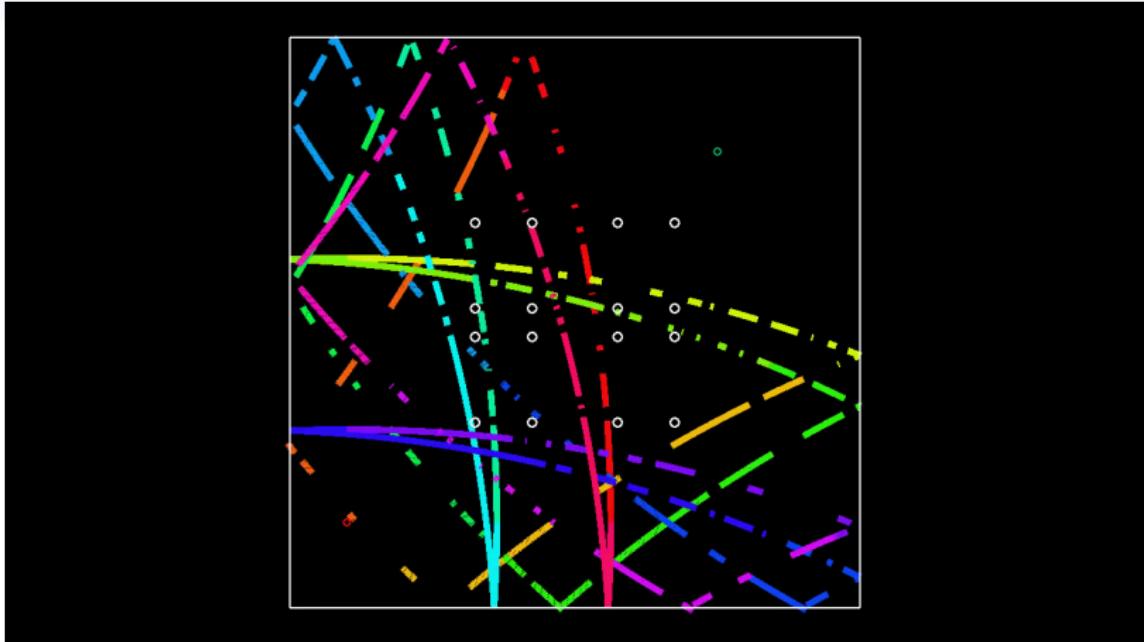
- ▷ Un **tireur** et une **cible** s'affrontent dans une pièce carrée garnie de miroirs
- ▷ La **cible** peut se protéger avec des **obstacles**

# Un duel au laser



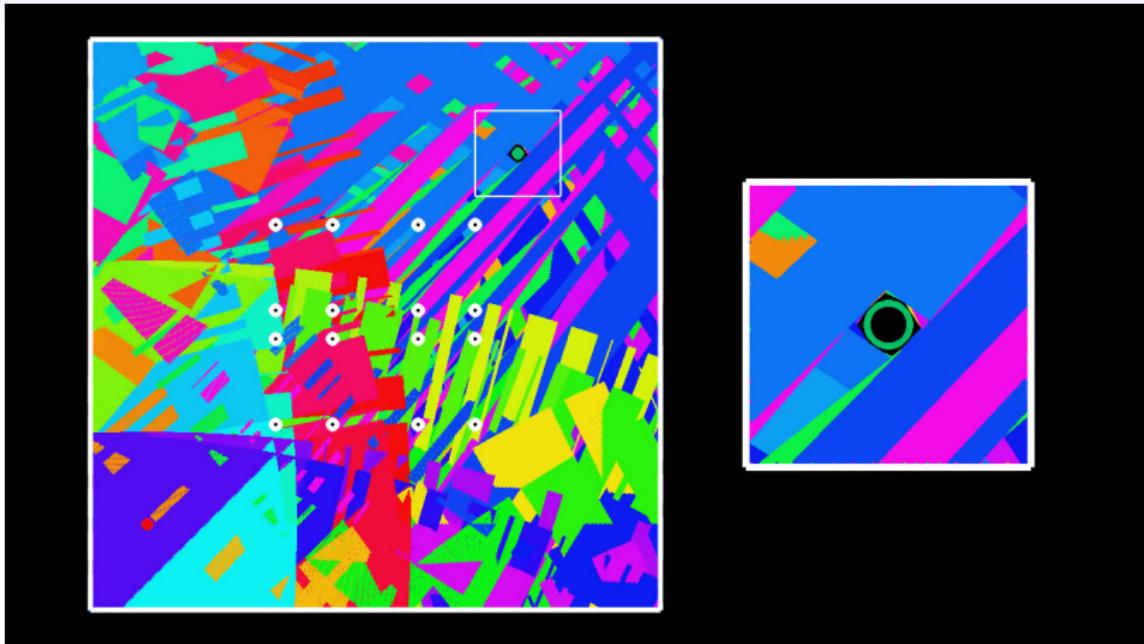
- ▷ Un **tireur** et une **cible** s'affrontent dans une pièce carrée garnie de miroirs
- ▷ La **cible** peut se protéger avec des **obstacles**
- ▷ Peut-elle se protéger contre tous les tirs possibles avec un nombre fini d'obstacles ?  
(On suppose les rayons et les obstacles de taille négligeable)

# Un duel au laser



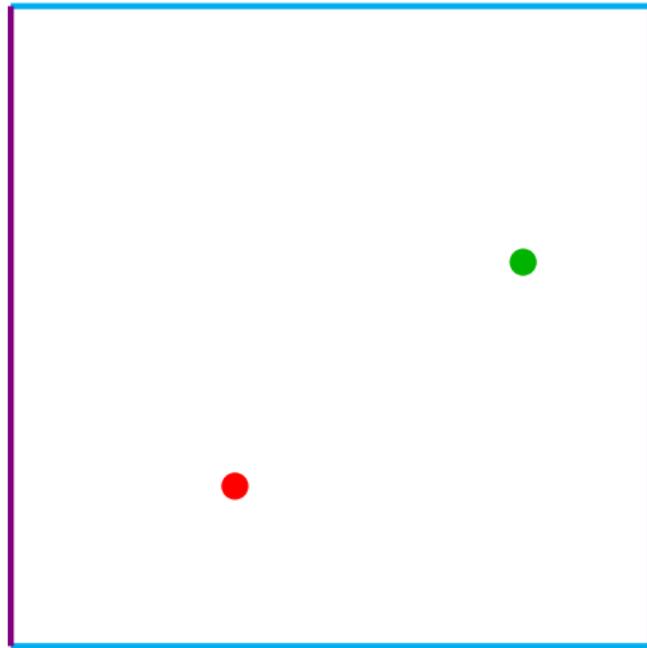
(En ligne : <https://youtu.be/kDZzyi-EaLQ>)

# Un duel au laser

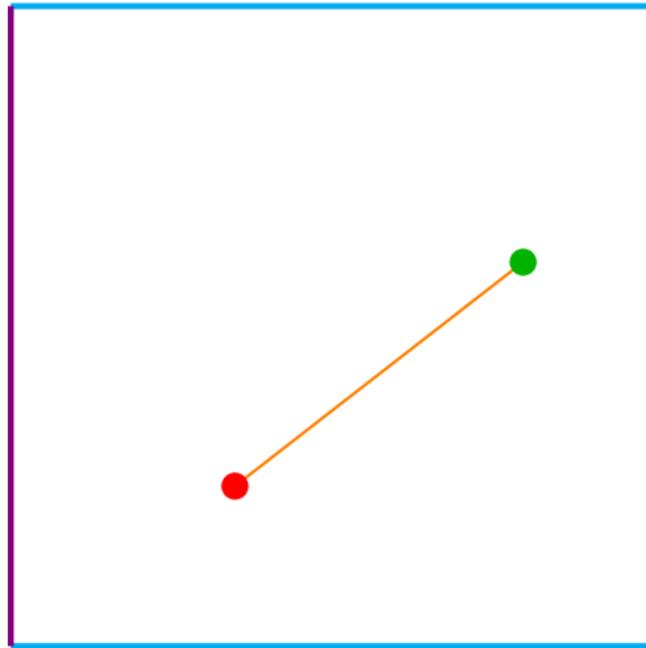


(En ligne : <https://youtu.be/aCs6dA4WiJs>)

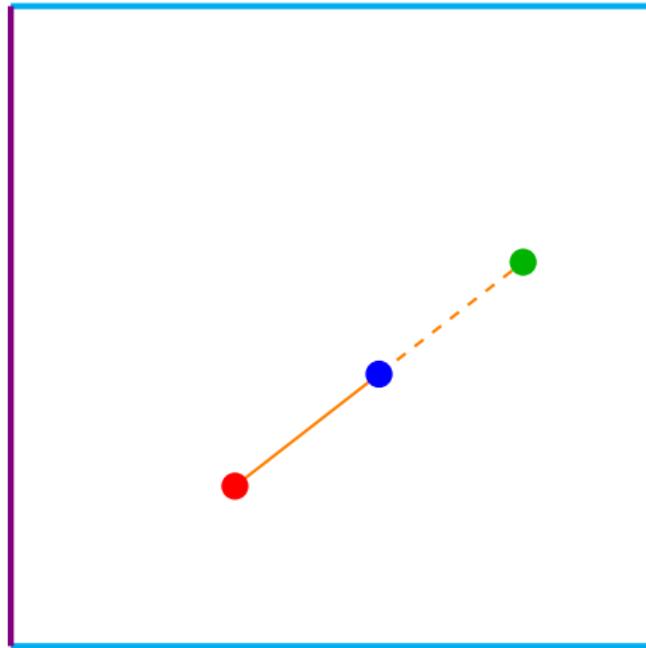
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



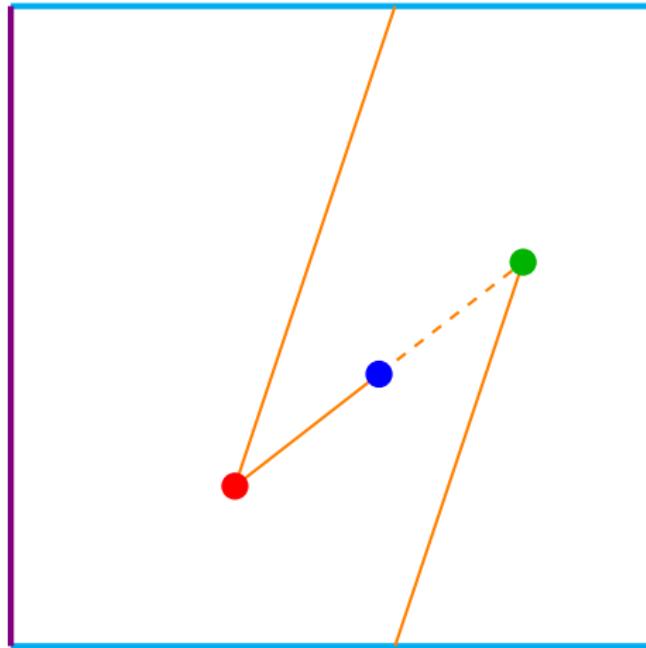
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



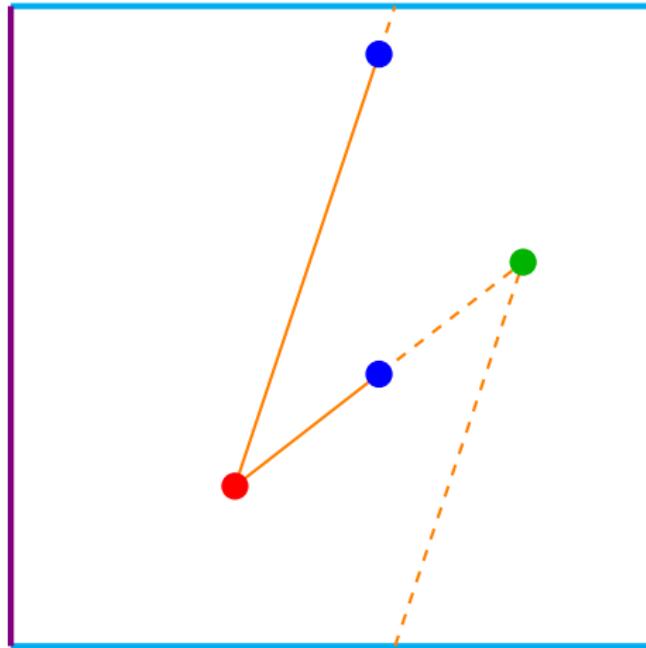
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



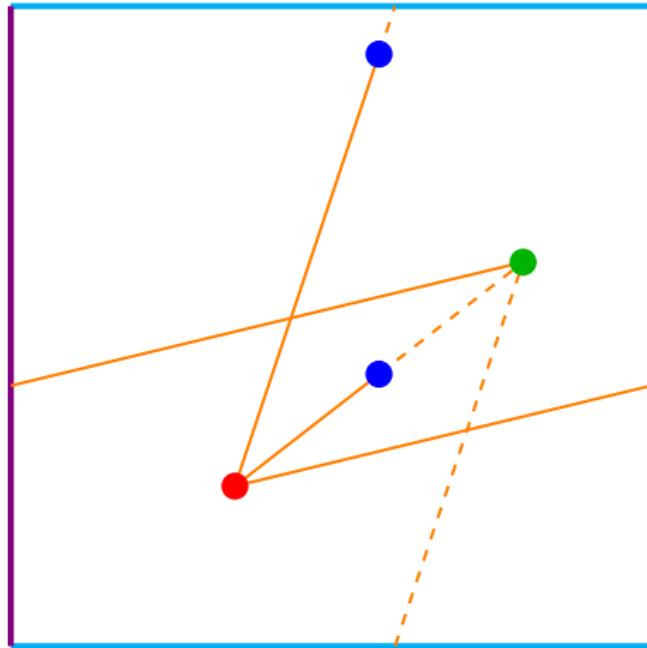
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



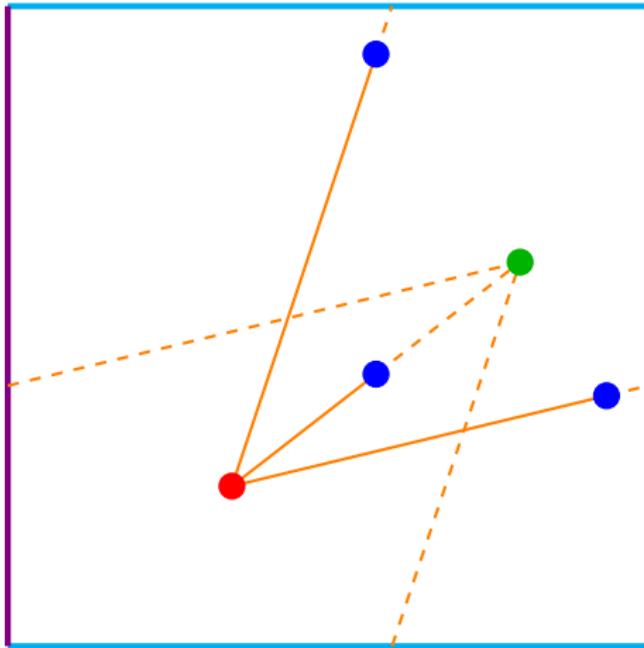
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



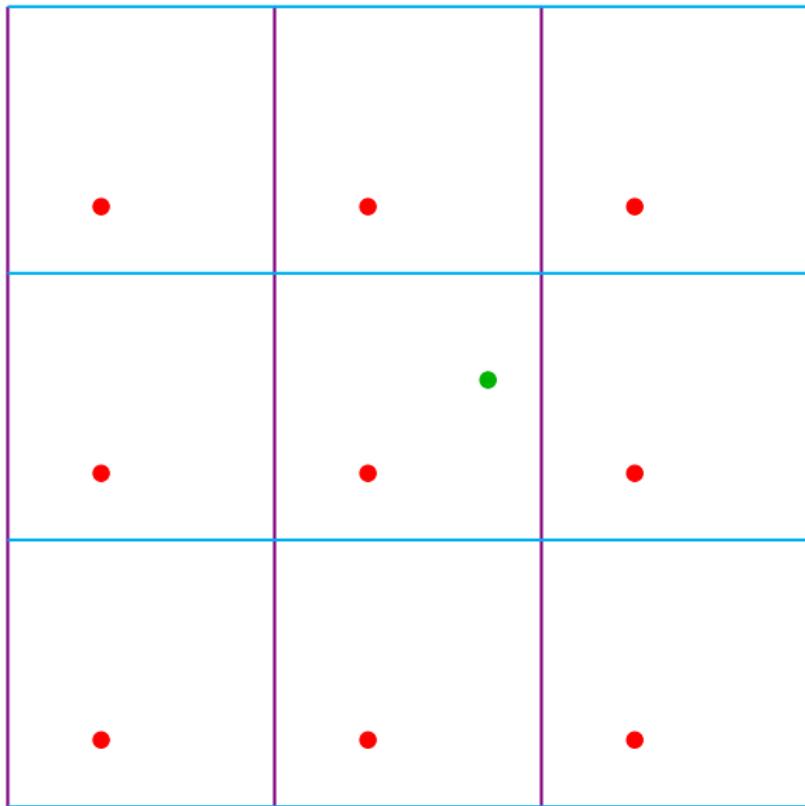
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



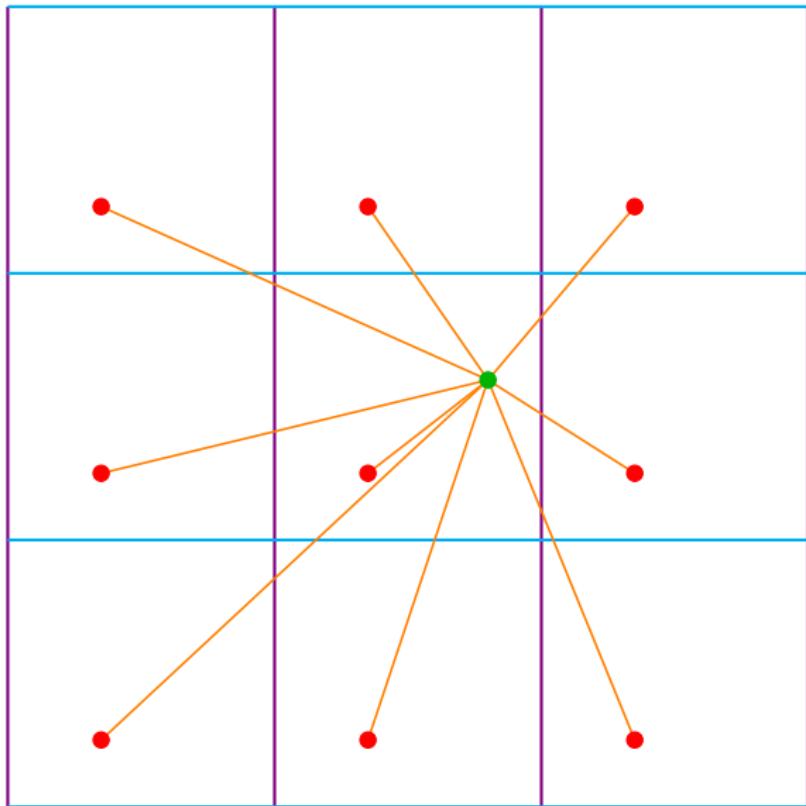
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



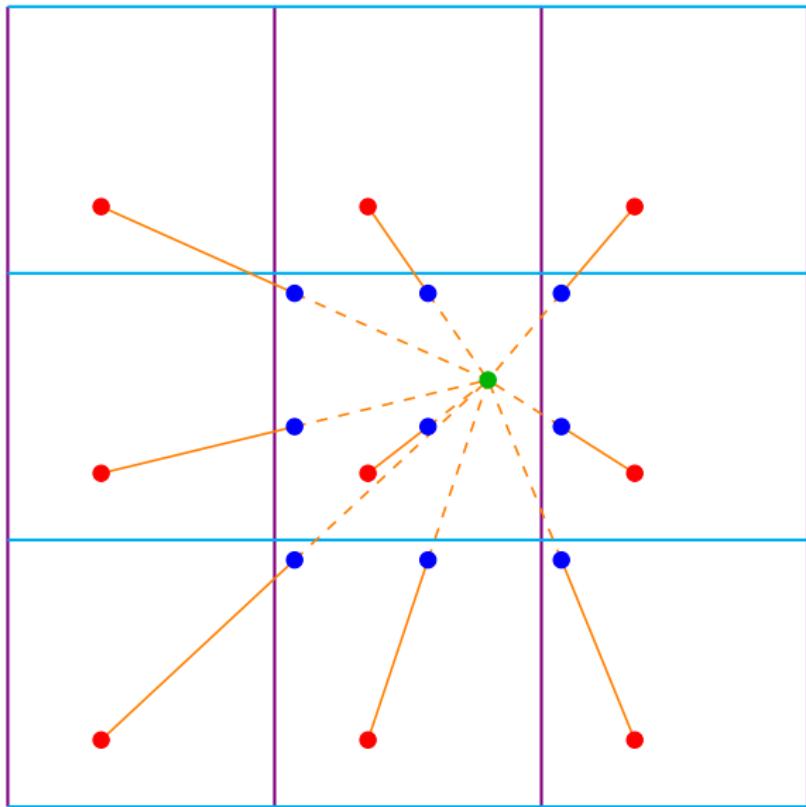
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



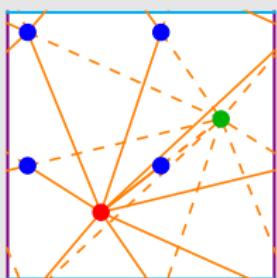
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



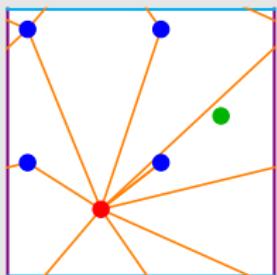
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



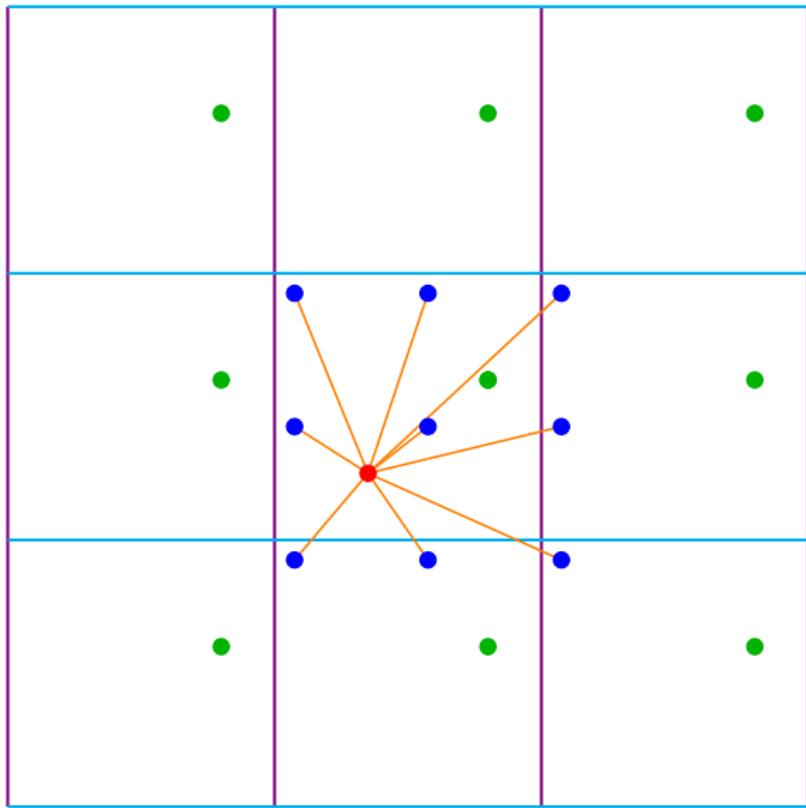
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



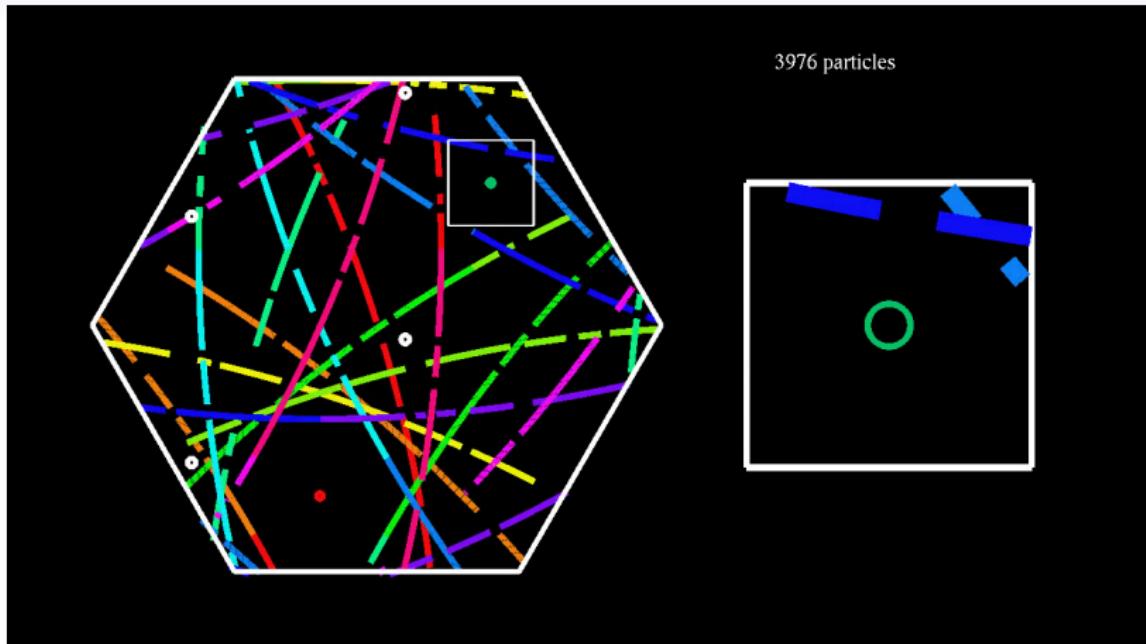
# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)



# Conditions aux bords périodiques (« pacman »)

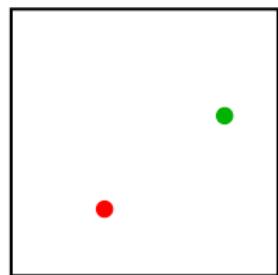


# Conditions périodiques sur un hexagone

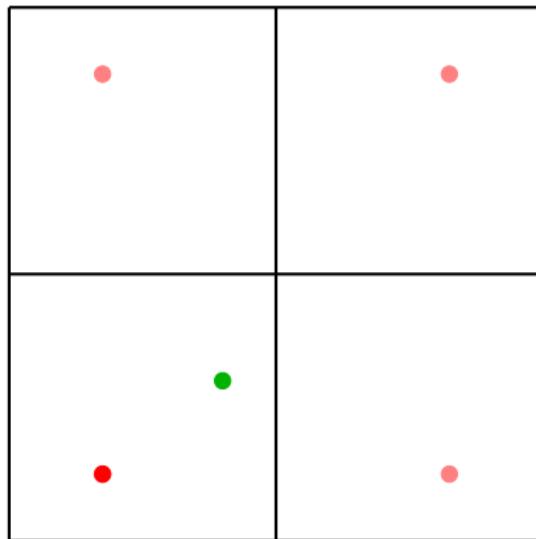


(En ligne : <https://youtu.be/qhqdAiypldc>)

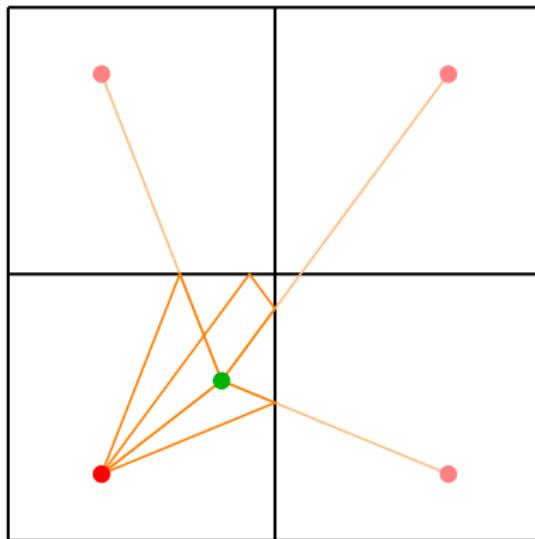
# Retour au carré recouvert de miroirs



# Retour au carré recouvert de miroirs

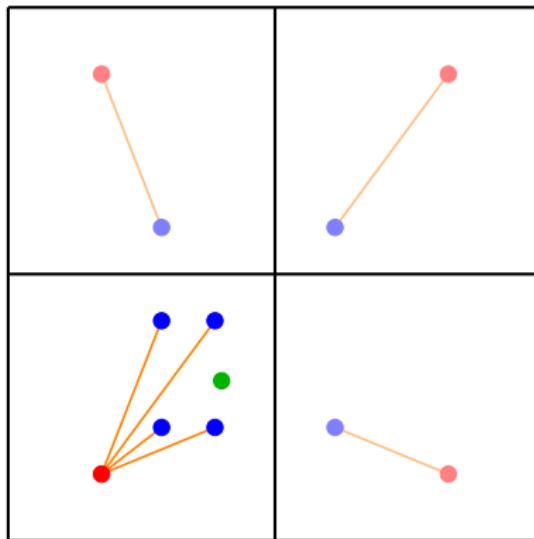


# Retour au carré recouvert de miroirs



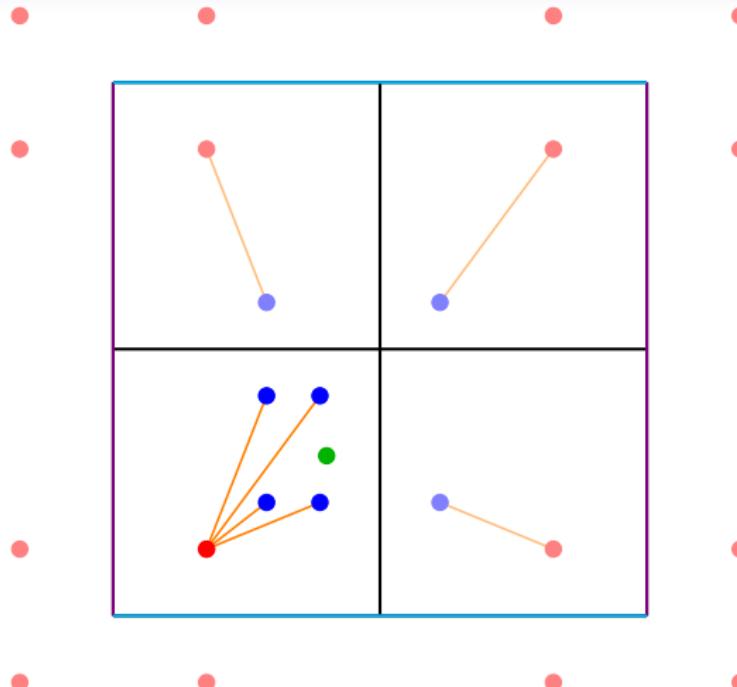
- ▷ Trajectoires ne touchant pas les murs gauche et bas :

# Retour au carré recouvert de miroirs



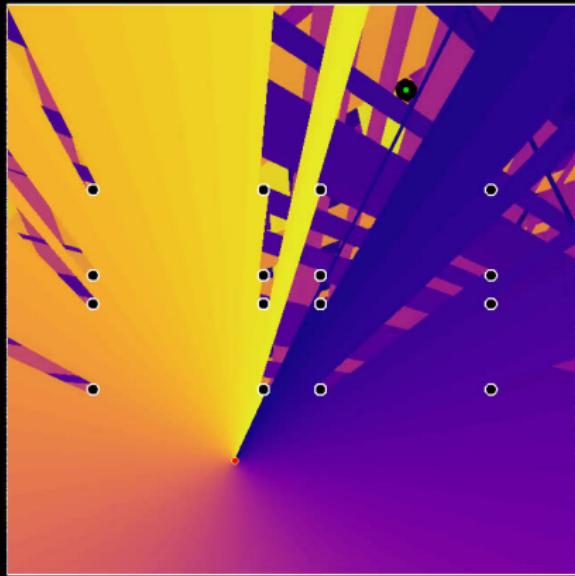
- ▷ Trajectoires ne touchant pas les murs gauche et bas : 4 obstacles

# Retour au carré recouvert de miroirs



- ▷ Trajectoires ne touchant pas les murs gauche et bas : 4 obstacles
- ▷ Autres trajectoires : 12 obstacles supplémentaires

# Retour au carré recouvert de miroirs



(En ligne : <https://youtu.be/vZLICiQPJvA>)

# Où sont les femmes ?

# Où sont les femmes ?

## Systèmes dynamiques



Viviane Baladi



Diana Davis



Lai-Sang Young

## Probabilités & physique statistique



Alice Guionnet



Laure Saint-Raymond

## Physique mathématique & mécanique quantique



Sylvia Serfaty



Nalini Anantharaman

# Pour en savoir plus

- ▷ Sur YouTube :  
<https://www.youtube.com/@NilsBerglund/>
- ▷ Articles dans Images des mathématiques :  
<https://images.math.cnrs.fr/>
- ▷ Cette présentation :  
[https://www.idpoisson.fr/berglund/Pau\\_MEJ\\_23.pdf](https://www.idpoisson.fr/berglund/Pau_MEJ_23.pdf)