Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 7. La loi des grands nombres

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

7.1. Inégalités

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire a valeurs positives, d'espérance finie.
Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(X)$$

7.1. Inégalités

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire a valeurs positives, d'espérance finie.
Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(X)$$

Proposition (Inégalité de Bienaymé–Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une variance finie σ^2.
Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

7.2. La loi des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

On se donne une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$, non corrélées (c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ dès que $i \neq j$). On suppose que les X_i ont tous la même espérance finie μ et la même variance finie σ^2.

7.2. La loi des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

On se donne une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$, non corrélées (c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ dès que $i \neq j$). On suppose que les X_i ont tous la même espérance finie μ et la même variance finie σ^2.
Pour tout $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

7.2. La loi des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

On se donne une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots,$ non corrélées (c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ dès que $i \neq j$). On suppose que les X_i ont tous la même espérance finie μ et la même variance finie σ^2.
Pour tout $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right\} = 0$$

7.3. Autres théorèmes limites (hors programme)

Théorème limite central

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On suppose que l'espérance commune μ des X_i est finie, et que la variance comune σ^2 des X_i est finie.

7.3. Autres théorèmes limites (hors programme)

Théorème limite central

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On suppose que l'espérance commune μ des X_i est finie, et que la variance comune σ^2 des X_i est finie.

Pour tout $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \qquad \widehat{S}_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

7.3. Autres théorèmes limites (hors programme)

Théorème limite central

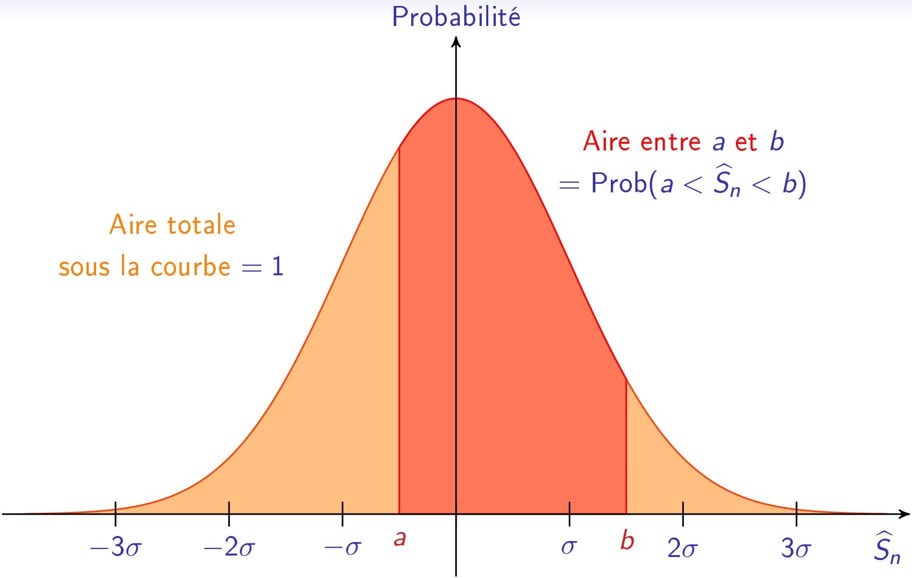
Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On suppose que l'espérance commune μ des X_i est finie, et que la variance comune σ^2 des X_i est finie.

Pour tout $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \qquad \widehat{S}_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

Alors, pour tout choix de $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{a \leq \widehat{S}_n \leq b\right\} = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x$$


Probabilité
Aire entre a et b
$= \text{Prob}(a < \widehat{S}_n < b)$
Aire totale
sous la courbe $= 1$
-3σ
-2σ
$-\sigma$
a
σ
b
2σ
3σ
$\widehat{S}_n$

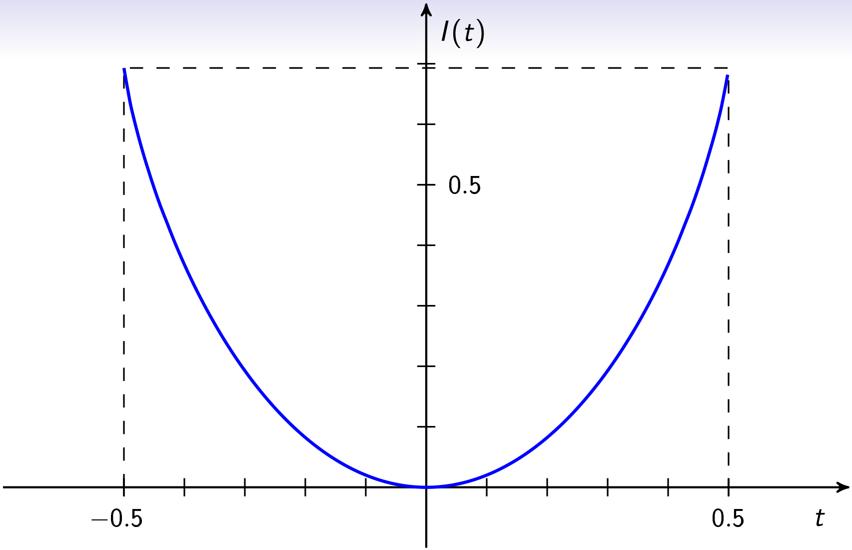
Proposition

On suppose que S_n suit une loi binômiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Alors pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on a

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > t\right\} \leq 2\,\mathrm{e}^{-nI(t)}$$

où

$$I(t) = \left(\frac{1}{2} + t\right)\ln(1+2t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)\ln(1-2t)$$



I(t)
0.5
−0.5
0.5
t