Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 6. Espérance

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

6.1. Définition et propriétés

Définition

Soit X une variable aléatoire telle que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$$

Alors son *espérance* est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

6.1. Définition et propriétés

Définition

Soit X une variable aléatoire telle que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$$

Alors son *espérance* est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

Remarques :

- Si Ω est fini, la condition est toujours vérifiée.

6.1. Définition et propriétés

Définition

Soit X une variable aléatoire telle que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$$

Alors son *espérance* est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

Remarques :

- Si Ω est fini, la condition est toujours vérifiée.
- Pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}\{X = x\}$$

pourvu que la série converge absolument si Ω est infini.

Proposition

Si l'espérance existe, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Proposition

Si l'espérance existe, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Proposition (linéarité de l'espérance)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires dont l'espérance existe, et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Alors l'espérance de $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ existe, et vaut

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1 \mathbb{E}(X_1) + \cdots + a_n \mathbb{E}(X_n)$$

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0, 1]$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1 - q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\dfrac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\dfrac{n+1}{2}$

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	nq

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	nq
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	nq
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{q}$

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	nq
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{q}$
Poisson	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$	

6.2. Espérances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$	q
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	nq
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{q}$
Poisson	$\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$	λ

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).
On appelle *écart-type* de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).
On appelle *écart-type* de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Proposition

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X = \mathbb{E}(X)\} = 1$.

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).
On appelle *écart-type* de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Proposition

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X = \mathbb{E}(X)\} = 1$.
2. $\mathrm{Var}(X) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) < \infty$.

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).
On appelle *écart-type* de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Proposition

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X = \mathbb{E}(X)\} = 1$.
2. $\mathrm{Var}(X) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) < \infty$.
3. Si $\mathrm{Var}(X) < \infty$ alors $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).
On appelle *écart-type* de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Proposition

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X = \mathbb{E}(X)\} = 1$.
2. $\mathrm{Var}(X) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) < \infty$.
3. Si $\mathrm{Var}(X) < \infty$ alors $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
4. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(a + bX) = b^2 \, \mathrm{Var}(X)$.

6.3. Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe. Alors sa *variance* est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - \mathbb{E}(X)]^2 \, \mathbb{P}\{X = x\}$$

si la somme converge (sinon, on dit que la variance est infinie).
On appelle *écart-type* de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Proposition

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X = \mathbb{E}(X)\} = 1$.
2. $\mathrm{Var}(X) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) < \infty$.
3. Si $\mathrm{Var}(X) < \infty$ alors $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
4. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(a + bX) = b^2 \,\mathrm{Var}(X)$.
5. Si $\mathrm{Var}(X) < \infty$ et $\mathrm{Var}(Y) < \infty$ alors $\mathrm{Var}(X + Y) < \infty$.

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\operatorname{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	$nq(1-q)$

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	$nq(1-q)$
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	$nq(1-q)$
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1-q}{q^2}$

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	$nq(1-q)$
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1-q}{q^2}$
Poisson	$\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$	

6.4. Variances des lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$

Loi	$\mathbb{P}\{X = k\}$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$	$q(1-q)$
Uniforme	$\frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$	$nq(1-q)$
Géométrique	$(1-q)^{k-1} q, \quad k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1-q}{q^2}$
Poisson	$\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$	λ

6.5. Covariance

Définition

On appelle *covariance* de deux variables aléatoires X et Y la quantité

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\big)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

6.5. Covariance

Définition

On appelle *covariance* de deux variables aléatoires X et Y la quantité

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\big)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Proposition

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

6.5. Covariance

Définition

On appelle *covariance* de deux variables aléatoires X et Y la quantité

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Proposition

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
- *Bilinéarité:* Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$.

6.5. Covariance

Définition

On appelle *covariance* de deux variables aléatoires X et Y la quantité

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Proposition

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
- *Bilinéarité:* Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$.
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

6.5. Covariance

Définition

On appelle *covariance* de deux variables aléatoires X et Y la quantité

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]) \\ &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Proposition

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- *Bilinéarité:* Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ et $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$.
- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- Pour des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on a

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Proposition

Si $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ sont finies, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est finie et

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

Proposition

Si $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ sont finies, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est finie et

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

La quantité

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

s'appelle le *coefficient de corrélation* de X et Y.

Proposition

Si $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ sont finies, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est finie et

$$|\,\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

La quantité

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

s'appelle le *coefficient de corrélation* de X et Y.

Proposition

Si X et Y sont *indépendantes*, et que leur espérance existe, alors elles sont *non corrélées*, c-à-d $\rho(X, Y) = 0$.

Proposition

Si $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ sont finies, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est finie et

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

La quantité

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

s'appelle le *coefficient de corrélation* de X et Y.

Proposition

Si X et Y sont *indépendantes*, et que leur espérance existe, alors elles sont *non corrélées*, c-à-d $\rho(X, Y) = 0$.

⚠ La réciproque est fausse.

Proposition

Si $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ sont finies, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est finie et

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

La quantité

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

s'appelle le *coefficient de corrélation* de X et Y.

Proposition

Si X et Y sont *indépendantes*, et que leur espérance existe, alors elles sont *non corrélées*, c-à-d $\rho(X, Y) = 0$.

⚠ La réciproque est fausse.

Conséquence : Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.