Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 5. Variables aléatoires

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

5.1. Variables aléatoires réelles

Définition

Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

5.1. Variables aléatoires réelles

Définition

Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Notations

- *Image* de X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$.
  C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.

5.1. Variables aléatoires réelles

Définition

Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Notations

- *Image* de X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$.
  C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Événement *«X appartient à A»*, $A \subset \mathbb{R}$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\}$$

  Noté aussi plus simplement $\{X \in A\}$.

5.1. Variables aléatoires réelles

Définition

Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Notations

- *Image* de X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$.
  C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Événement *«X appartient à A»*, $A \subset \mathbb{R}$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\}$$

  Noté aussi plus simplement $\{X \in A\}$.
- $\mathbb{P}(\{X \in A\})$ sera abrégée $\mathbb{P}\{X \in A\}$ ou $\mathbb{P}(X \in A)$.

5.1. Variables aléatoires réelles

Définition

Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Notations

- *Image* de X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$.
  C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Événement *«X appartient à A»*, $A \subset \mathbb{R}$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\}$$

  Noté aussi plus simplement $\{X \in A\}$.
- $\mathbb{P}(\{X \in A\})$ sera abrégée $\mathbb{P}\{X \in A\}$ ou $\mathbb{P}(X \in A)$.
- $\mathbb{P}\{X = z\} = \mathbb{P}\{X \in \{z\}\}$, $\mathbb{P}\{X \leq z\} = \mathbb{P}\{X \in]-\infty, z]\}$, etc...

5.1. Variables aléatoires réelles

Définition

Soit (Ω, p) un espace probabilisé discret. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Notations

- *Image* de X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$.
  C'est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Événement *«X appartient à A»*, $A \subset \mathbb{R}$:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\}$$

  Noté aussi plus simplement $\{X \in A\}$.
- $\mathbb{P}(\{X \in A\})$ sera abrégée $\mathbb{P}\{X \in A\}$ ou $\mathbb{P}(X \in A)$.
- $\mathbb{P}\{X = z\} = \mathbb{P}\{X \in \{z\}\}$, $\mathbb{P}\{X \leq z\} = \mathbb{P}\{X \in]-\infty, z]\}$, etc...
- $\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X \in B\})$ est abrégé $\mathbb{P}\{X \in A, X \in B\}$.

5.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition

La *loi* de la variable aléatoire réelle X est l'application

$$\begin{aligned} f : X(\Omega) &\to [0,1] \\ x &\mapsto f(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(X^{-1}\{x\}) \end{aligned}$$

5.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition

La *loi* de la variable aléatoire réelle X est l'application

$$\begin{aligned} f : X(\Omega) &\to [0,1] \\ x &\mapsto f(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(X^{-1}\{x\}) \end{aligned}$$

Remarques :

1. $(X(\Omega), f)$ est un espace probabilisé discret.

5.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition

La *loi* de la variable aléatoire réelle X est l'application

$$\begin{aligned} f : X(\Omega) &\to [0,1] \\ x &\mapsto f(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \mathbb{P}(X^{-1}\{x\}) \end{aligned}$$

Remarques :

1. $(X(\Omega), f)$ est un espace probabilisé discret.
2. La loi de X peut aussi être vue comme l'application associant $\mathbb{P}\{X \in A\}$ à tout $A \subset X(\Omega)$.
   C'est une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$.

5.3. Lois usuelles

Paramètres $q \in [0, 1]$

Loi	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}\{X = k\}$
Bernoulli	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} 1 - q & \text{si } k = 0 \\ q & \text{si } k = 1 \end{cases}$

5.3. Lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}\{X = k\}$
Bernoulli	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$
Uniforme	$\{1, 2, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$

5.3. Lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}\{X = k\}$
Bernoulli	$\{0,1\}$	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$
Uniforme	$\{1, 2, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$
Binomiale	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$

5.3. Lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Loi	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}\{X = k\}$
Bernoulli	$\{0,1\}$	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$
Uniforme	$\{1, 2, \dots, n\}$	$\dfrac{1}{n}$
Binomiale	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\dbinom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$
Géométrique	$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$	$(1-q)^{k-1} q$

5.3. Lois usuelles

Paramètres $q \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$, $\lambda > 0$

Loi	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}\{X=k\}$
Bernoulli	$\{0,1\}$	$\begin{cases} 1-q & \text{si } k=0 \\ q & \text{si } k=1 \end{cases}$
Uniforme	$\{1,2,\dots,n\}$	$\frac{1}{n}$
Binomiale	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$
Géométrique	$\mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$	$(1-q)^{k-1} q$
Poisson	$\mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

5.4. Variables aléatoires indépendantes

Définition

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont *indépendantes* si

$$\mathbb{P}\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \ldots \mathbb{P}\{X_n = x_n\}$$

pour tout choix de $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots x_n \in X_n(\Omega)$.

5.4. Variables aléatoires indépendantes

Définition

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont *indépendantes* si

$$\mathbb{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_1 = x_1\} \dots \mathbb{P}\{X_n = x_n\}$$

pour tout choix de $x_1 \in X_1(\Omega), \dots x_n \in X_n(\Omega)$.

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.
2. Pour tout choix de $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \dots \mathbb{P}\{X_n \in A_n\}$$
3. Pour tout choix de $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont indépendants.
4. Pour tout choix de $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ sont indépendants.

Proposition

1. Si $X_1, \dots, X_n$ sont *indépendantes*, et suivent des lois de Bernoulli de paramètre q, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n, q).

Proposition

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont *indépendantes*, et suivent des lois de Bernoulli de paramètre q, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n, q).
2. Si X et Y sont *indépendantes*, X suit une loi binomiale de paramètres (n, q) et Y suit une loi binomiale de paramètres (m, q), alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n + m, q)$.

Proposition

1. Si $X_1, \dots, X_n$ sont *indépendantes*, et suivent des lois de Bernoulli de paramètre q, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n, q).
2. Si X et Y sont *indépendantes*, X suit une loi binomiale de paramètres (n, q) et Y suit une loi binomiale de paramètres (m, q), alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n + m, q)$.
3. Si X et Y sont *indépendantes*, X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Proposition

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont *indépendantes*, et suivent des lois de Bernoulli de paramètre q, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n, q).
2. Si X et Y sont *indépendantes*, X suit une loi binomiale de paramètres (n, q) et Y suit une loi binomiale de paramètres (m, q), alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n + m, q)$.
3. Si X et Y sont *indépendantes*, X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Proposition

Si X suit une loi géométrique, alors pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\{X = n + k | X > n\} = \mathbb{P}\{X = k\}$$