Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 4. Indépendance

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

4.1. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \subset \Omega$, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

4.1. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \subset \Omega$, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition

Pour $A, B \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

1. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B|B)$.

4.1. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \subset \Omega$, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition

Pour $A, B \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

1. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B|B)$.
2. $B \subset A$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 1$.

4.1. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \subset \Omega$, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition

Pour $A, B \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

1. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B|B)$.
2. $B \subset A$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 1$.
3. $A \cap B = \varnothing$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 0$.

4.1. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \subset \Omega$, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition

Pour $A, B \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

1. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B|B)$.
2. $B \subset A$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 1$.
3. $A \cap B = \varnothing$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 0$.
4. Si les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \middle| B\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i|B)$$

4.1. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \subset \Omega$, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition

Pour $A, B \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$,

1. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B|B)$.
2. $B \subset A$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 1$.
3. $A \cap B = \varnothing$ implique $\mathbb{P}(A|B) = 0$.
4. Si les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \middle| B\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i|B)$$
5. $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

Théorème (*Loi de la probabilité totale*)

Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements deux à deux incompatibles, tous de probabilité non nulle. Alors pour tout $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)$$

Théorème (*Loi de la probabilité totale*)

Soient $B_1, \dots, B_n$ des événements deux à deux incompatibles, tous de probabilité non nulle. Alors pour tout $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)$$

Théorème (*Formule de Bayes*)

Soient $B_1, \dots, B_n$ des événements deux à deux incompatibles, tous de probabilité non nulle. Alors pour tout $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$ et $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}$$

4.2. Indépendance

Définition

1. Deux événements A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
   Dans ce cas, si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

4.2. Indépendance

Définition

1. Deux événements A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Dans ce cas, si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
2. n événements $A_1, \dots, A_n$ sont *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

pour tout choix d'indices $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$.

4.2. Indépendance

Définition

1. Deux événements A et B sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
   Dans ce cas, si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
2. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

   pour tout choix d'indices $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Par exemple, si les evts des couples (A, B), (A, C) et (B, C) sont indépendants, les evts du triplet (A, B, C) ne sont pas forcément indépendants.

4.3. Produit d'espaces probabilisés discrets

Définition

Soient $(\Omega_1, p_1), \ldots, (\Omega_n, p_n)$ des espaces probabilisés discrets. On appelle *espace produit* de ces espaces l'espace probabilisé (Ω, p) défini par $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ et

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \Rightarrow \quad p(\omega) = p_1(\omega_1) \ldots p_n(\omega_n)$$

4.3. Produit d'espaces probabilisés discrets

Définition

Soient $(\Omega_1, p_1), \ldots, (\Omega_n, p_n)$ des espaces probabilisés discrets. On appelle *espace produit* de ces espaces l'espace probabilisé (Ω, p) défini par $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ et

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \Rightarrow \quad p(\omega) = p_1(\omega_1) \ldots p_n(\omega_n)$$

Proposition

Soit (Ω, p) l'espace produit de $(\Omega_1, p_1), \ldots, (\Omega_n, p_n)$. Soient $A_1 \subset \Omega_1, \ldots, A_n \subset \Omega_n$ des événements de $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ respectivement. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ on définit

$$\begin{aligned} B_i &= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega_i \in A_i\} \subset \Omega \end{aligned}$$

Alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants.