Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 3. Espaces probabilisés

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

3.1. Espace probabilisé discret

Une expérience aléatoire est décrite par

- Un *univers* Ω : C'est l'ensemble des résultats possibles.
  Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés *éventualités* ou *événements élémentaires*

3.1. Espace probabilisé discret

Une expérience aléatoire est décrite par

- Un *univers* Ω : C'est l'ensemble des résultats possibles.
  Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés *éventualités* ou *événements élémentaires*
- Une *distribution de probabilité* : Elle associe à chaque $\omega \in \Omega$ sa probabilité $p(\omega) \in [0, 1]$.

3.1. Espace probabilisé discret

Une expérience aléatoire est décrite par

- Un *univers* Ω : C'est l'ensemble des résultats possibles.
  Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés *éventualités* ou *événements élémentaires*
- Une *distribution de probabilité* : Elle associe à chaque $\omega \in \Omega$ sa probabilité $p(\omega) \in [0, 1]$.
- On parle d'espace *discret* si Ω est fini ou dénombrable (c-à-d s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to \Omega$).

3.1. Espace probabilisé discret

Une expérience aléatoire est décrite par

- Un *univers* Ω : C'est l'ensemble des résultats possibles.
  Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés *éventualités* ou *événements élémentaires*
- Une *distribution de probabilité* : Elle associe à chaque $\omega \in \Omega$ sa probabilité $p(\omega) \in [0, 1]$.
- On parle d'espace *discret* si Ω est fini ou dénombrable (c-à-d s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to \Omega$).

Définition

Un *espace probabilisé discret* est un couple (Ω, p), où

- Ω est un ensemble non vide, fini ou dénombrable
- $p : \Omega \to [0, 1]$ est une fonction satisfaisant

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

3.2. Événements

Définition

- Un *événement composé*, ou simplement *événement*, d'un espace probabilisé discret (Ω, p) est une partie $A \subset \Omega$.

3.2. Événements

Définition

- Un *événement composé*, ou simplement *événement*, d'un espace probabilisé discret (Ω, p) est une partie $A \subset \Omega$.
- La probabilité de A est

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

3.2. Événements

Définition

- Un *événement composé*, ou simplement *événement*, d'un espace probabilisé discret (Ω, p) est une partie $A \subset \Omega$.
- La probabilité de A est

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

- L'ensemble vide $\varnothing \subset \Omega$ est un événement.
  Il est appelé *événement impossible*, et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

3.2. Événements

Définition

- Un *événement composé*, ou simplement *événement*, d'un espace probabilisé discret (Ω, p) est une partie $A \subset \Omega$.
- La probabilité de A est

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

- L'ensemble vide $\varnothing \subset \Omega$ est un événement.
  Il est appelé *événement impossible*, et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- L'univers Ω est un événement.
  Il est appelé *événement certain*, et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

3.3. Opérations logiques sur les événements

Nouveaux événements définis à partir d'un ou deux événements :

Opération logique	Équivalent
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
non A	$\Omega \setminus A = A^c$

3.3. Opérations logiques sur les événements

Nouveaux événements définis à partir d'un ou deux événements :

Opération logique	Équivalent
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
non A	$\Omega \setminus A = A^c$

Relations entre événements :

Relation	Équivalent
A et B incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
A implique B	$A \subset B$

Proposition

1. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Proposition

1. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. Pour tout ensemble $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

Proposition

1. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. Pour tout ensemble $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
3. Si les événements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sont *incompatibles deux à deux*, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

Proposition

1. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. Pour tout ensemble $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
3. Si les événements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sont *incompatibles deux à deux*, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Proposition

1. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. Pour tout ensemble $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
3. Si les événements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sont *incompatibles deux à deux*, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.
5. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Proposition

1. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. Pour tout ensemble $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
3. Si les événements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sont *incompatibles deux à deux*, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.
5. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
6. On a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$.

3.4. Mesure de probabilité

Définition

Soit Ω un ensemble non vide, fini ou dénombrable. Une *mesure de probabilité* sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ satisfaisant

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements incompatibles 2 à 2, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

3.4. Mesure de probabilité

Définition

Soit Ω un ensemble non vide, fini ou dénombrable. Une *mesure de probabilité* sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ satisfaisant

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements incompatibles 2 à 2, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

Proposition

(Ω, p) est un espace probabilisé discret si et seulement si l'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$ est une mesure de probabilité.

3.4. Mesure de probabilité

Définition

Soit Ω un ensemble non vide, fini ou dénombrable. Une *mesure de probabilité* sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ satisfaisant

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements incompatibles 2 à 2, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

Proposition

(Ω, p) est un espace probabilisé discret si et seulement si l'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$ est une mesure de probabilité.

L'intérêt de la définition est qu'elle se généralise à des Ω non dénombrables, par exemple $\Omega = \mathbb{R}$. Il faut alors remplacer $\mathscr{P}(\Omega)$ par une *tribu* sur Ω (une collection de sous-ensembles comprenant Ω, stable par complémentaire et réunion).