Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 2. Dénombrement

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

2.1. Arrangements avec répétition

2.1. Arrangements avec répétition

Définition (Produit cartésien)

- Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (a_1, a_2) avec $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.

2.1. Arrangements avec répétition

Définition (Produit cartésien)

- Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (a_1, a_2) avec $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le *produit cartésien* de k ensembles $E_1, \ldots, E_k$ est l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_k$ des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ avec $a_1 \in E_1, \ldots a_k \in E_k$.

2.1. Arrangements avec répétition

Définition (Produit cartésien)

- Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (a_1, a_2) avec $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le *produit cartésien* de k ensembles $E_1, \ldots, E_k$ est l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_k$ des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ avec $a_1 \in E_1, \ldots a_k \in E_k$.
- On écrit $E^2 = E \times E$, et $E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ copies}}$.

2.1. Arrangements avec répétition

Définition (Produit cartésien)

- Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (a_1, a_2) avec $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le *produit cartésien* de k ensembles $E_1, \ldots, E_k$ est l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_k$ des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ avec $a_1 \in E_1, \ldots a_k \in E_k$.
- On écrit $E^2 = E \times E$, et $E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ copies}}$.
- Un élément de E^k est un *arrangement de longueur k* d'éléments de E

2.1. Arrangements avec répétition

Définition (Produit cartésien)

- Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (a_1, a_2) avec $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le *produit cartésien* de k ensembles $E_1, \dots, E_k$ est l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_k$ des k-uplets $(a_1, \dots, a_k)$ avec $a_1 \in E_1, \dots a_k \in E_k$.
- On écrit $E^2 = E \times E$, et $E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ copies}}$.
- Un élément de E^k est un *arrangement de longueur k* d'éléments de E

Proposition

Si $E_1, \dots, E_k$ sont finis, alors

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \dots \mathrm{Card}(E_k)$$

2.1. Arrangements avec répétition

Définition (Produit cartésien)

- Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (a_1, a_2) avec $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le *produit cartésien* de k ensembles $E_1, \dots, E_k$ est l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_k$ des k-uplets $(a_1, \dots, a_k)$ avec $a_1 \in E_1, \dots a_k \in E_k$.
- On écrit $E^2 = E \times E$, et $E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ copies}}$.
- Un élément de E^k est un *arrangement de longueur k* d'éléments de E

Proposition

Si E_1, ..., E_k sont finis, alors

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \dots \mathrm{Card}(E_k)$$

Conséquence: Le nombre d'arrangements (avec répétition) de k éléments d'un ensemble fini E de cardinal $\mathrm{Card}(E) = n$ est n^k.

2.2. Permutations, arrangements sans répétition

2.2. Permutations, arrangements sans répétition

Définition (factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.2. Permutations, arrangements sans répétition

Définition (factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

2.2. Permutations, arrangements sans répétition

Définition (factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

- $n!$ est égal au nombre de *permutations* de $\{1, \dots, n\}$ c-à-d de bijections σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ sur lui–même.

2.2. Permutations, arrangements sans répétition

Définition (factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

- $n!$ est égal au nombre de *permutations* de $\{1, \ldots, n\}$ c-à-d de bijections σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ sur lui–même.
- Un *arrangement sans répétition* de n éléments $a_1, \ldots, a_n$ est un n-uplet $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$, où σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Il existe donc $n!$ arrangements sans répétition de n éléments.

2.2. Permutations, arrangements sans répétition

Définition (factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

- $n!$ est égal au nombre de *permutations* de $\{1, \dots, n\}$ c-à-d de bijections σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ sur lui–même.
- Un *arrangement sans répétition* de n éléments $a_1, \dots, a_n$ est un n-uplet $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$, où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Il existe donc $n!$ arrangements sans répétition de n éléments.
- **Généralisation :** Soit $n \geq k \geq 1$. Le nombre d'applications injectives $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ est $n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

  C'est aussi le nombre d'arrangements sans répétition de k éléments qu'on peut former avec n éléments.

2.3. Combinaisons (sans répétition)

2.3. Combinaisons (sans répétition)

Définition (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n \text{ entiers}$$

2.3. Combinaisons (sans répétition)

Définition (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n \text{ entiers}$$

- Soit E un ensemble de cardinal n. Alors $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E ayant cardinal k.
- $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de combinaisons de k objets parmi n.

2.3. Combinaisons (sans répétition)

Définition (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n \text{ entiers}$$

- Soit E un ensemble de cardinal n. Alors $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E ayant cardinal k.
- $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de combinaisons de k objets parmi n.

Quelques propriétés

- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

2.3. Combinaisons (sans répétition)

Définition (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n \text{ entiers}$$

- Soit E un ensemble de cardinal n. Alors $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E ayant cardinal k.
- $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de combinaisons de k objets parmi n.

Quelques propriétés

- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2.3. Combinaisons (sans répétition)

Définition (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n \text{ entiers}$$

- Soit E un ensemble de cardinal n. Alors $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E ayant cardinal k.
- $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de combinaisons de k objets parmi n.

Quelques propriétés

- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad \forall\ 0 < k \leq n$

2.3. Combinaisons (sans répétition)

Définition (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall\ 0 \leq k \leq n \text{ entiers}$$

- Soit E un ensemble de cardinal n. Alors $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E ayant cardinal k.
- $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de combinaisons de k objets parmi n.

Quelques propriétés

- $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n$ Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad \forall\ 0 < k \leq n$
- $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \forall\ 0 < k \leq n$ (*triangle de Pascal*)

Le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$								$\ddots$

Le triangle de Pascal

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$								$\ddots$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Binôme

Théorème (formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Binôme

Théorème (formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Relations avec $\mathscr{P}(E)$

Supposons que $\operatorname{Card} E = n$. Alors

Binôme

Théorème (formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Relations avec $\mathscr{P}(E)$

Supposons que Card $E = n$. Alors

- Card $\mathscr{P}(E) = 2^n$

Binôme

Théorème (formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Relations avec $\mathscr{P}(E)$

Supposons que Card $E = n$. Alors

- Card $\mathscr{P}(E) = 2^n$
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E dont le cardinal est égal à k

2.4. Permutations avec répétition

2.4. Permutations avec répétition

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On suppose que les éléments de E sont répartis en k classes d'objets indiscernables. Soit n_i le nombre d'objets de la $i$ème classe, avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

2.4. Permutations avec répétition

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On suppose que les éléments de E sont répartis en k classes d'objets indiscernables. Soit n_i le nombre d'objets de la $i$ème classe, avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
Alors le nombre de *permutations (avec répétition)* différentes de E est

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

2.4. Permutations avec répétition

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On suppose que les éléments de E sont répartis en k classes d'objets indiscernables. Soit n_i le nombre d'objets de la $i$ème classe, avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
Alors le nombre de *permutations (avec répétition)* différentes de E est

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Remarque : Si $k = 2$, alors

$$\binom{n}{n1\ n2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$$

2.5. Résumé

- Arrangements avec répétition de k objets parmi n : n^k
- Permutations (sans répétition) de n objets : $n!$
- Arrangements sans répétition de k objets parmi n : $\dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Combinaisons de k objets parmi n : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Permutations avec répétition de n objets en k classes :

$$\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \qquad n_1 + \cdots + n_k = n$$