Université d'Orléans

L2 informatique – Probabilités
Chapitre 1. Ensembles et fonctions

Nils Berglund

Année académique 2023–2024

1.1. Ensembles

- Un *ensemble* est une collection d'éléments.
- Exemples : $\{0, 1\}$, $\{\text{rouge}, \text{noir}\}$, $\{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$
  $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

1.1. Ensembles

- Un *ensemble* est une collection d'éléments.
- Exemples : $\{0,1\}$, $\{\text{rouge}, \text{noir}\}$, $\{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$
  $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- L'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, ne contient aucun élément : $\varnothing = \{\ \}$

1.1. Ensembles

- Un *ensemble* est une collection d'éléments.
- Exemples : $\{0, 1\}$, $\{\text{rouge}, \text{noir}\}$, $\{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$
  $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- L'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, ne contient aucun élément : $\varnothing = \{\ \}$
- On note $x \in E$ si x est élément de E
  et $x \notin E$ dans le cas contraire.

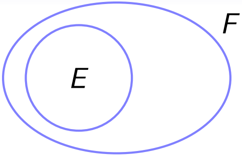
1.1. Ensembles

- Un *ensemble* est une collection d'éléments.
- Exemples : $\{0,1\}$, $\{\text{rouge}, \text{noir}\}$, $\{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$
  $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- L'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, ne contient aucun élément : $\varnothing = \{\ \}$
- On note $x \in E$ si x est élément de E
  et $x \notin E$ dans le cas contraire.
- Notation: ensemble défini par une propriété
  - $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1\right\} = [0,1]$
  - $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x-3| < 4\right\} =]-1,7[$
  - $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^5 = 1\right\}$
  - $\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\right\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
    est l'ensemble des entiers pairs.

Relations et operations sur les ensembles

- **Inclusion :** $E \subset F$ si $\forall x \in E\,(x \in F)$

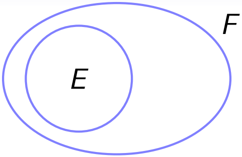
  c-à-d tout élément de E est élément de F. On dit que E est un *sous-ensemble* de F ou une *partie* de F.



Relations et operations sur les ensembles

- **Inclusion :** $E \subset F$ si $\forall x \in E \, (x \in F)$

  c-à-d tout élément de E est élément de F.
  On dit que E est un *sous-ensemble* de F ou une *partie* de F.



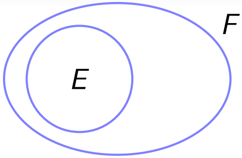
- **Égalité :** $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$

  Remarque : on abrègera parfois « si et seulement si » par « ssi »

Relations et operations sur les ensembles

- **Inclusion :** $E \subset F$ si $\forall x \in E\,(x \in F)$

  c-à-d tout élément de E est élément de F.
  On dit que E est un *sous-ensemble* de F ou une *partie* de F.



- **Égalité :** $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$

  Remarque : on abrègera parfois « si et seulement si » par « ssi »

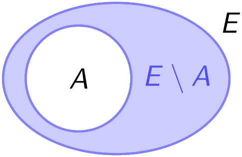
- **Ensemble des parties de E:** $\mathscr{P}(E) = \{F \mid F \subset E\}$

  Exemple:
  $\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$

Relations et operations sur les ensembles

- **Complémentaire :** Si $A \subset E$, alors $E \setminus A = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$

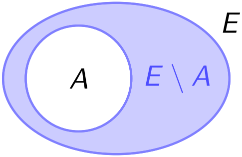
  Autres notations: A^c, $\complement_E A, \overline{A}$



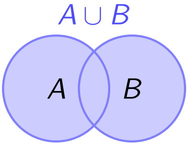
Relations et operations sur les ensembles

- **Complémentaire :** Si $A \subset E$, alors
  $E \setminus A = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$

  Autres notations: A^c, $\complement_E A, \overline{A}$



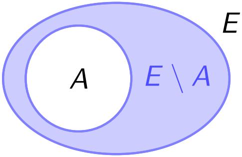
- **Union :**
  $A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$



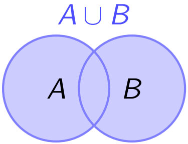
Relations et operations sur les ensembles

- **Complémentaire :** Si $A \subset E$, alors $E \setminus A = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$

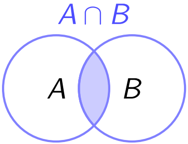
  Autres notations: A^c, $\complement_E A, \overline{A}$



- **Union :** $A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$



- **Intersection :** $A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$



Proposition

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Alors

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (qu'on peut donc écrire $A \cap B \cap C$)
- $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A, \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Proposition

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Alors

- ▹ $A \cap B = B \cap A$
- ▹ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (qu'on peut donc écrire $A \cap B \cap C$)
- ▹ $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- ▹ $A \cup B = B \cup A$
- ▹ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (qu'on peut donc écrire $A \cup B \cup C$)
- ▹ $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Proposition

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Alors

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (qu'on peut donc écrire $A \cap B \cap C$)
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (qu'on peut donc écrire $A \cup B \cup C$)
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Proposition

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Alors

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (qu'on peut donc écrire $A \cap B \cap C$)
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (qu'on peut donc écrire $A \cup B \cup C$)
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

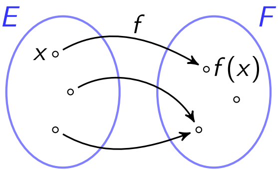
- $E \setminus (E \setminus A) = A$ et donc $A \subset B \Leftrightarrow (E \setminus B) \subset (E \setminus A)$
- $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$
- $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

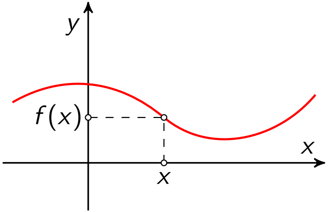
1.2. Fonctions

Une *application* (ou une *fonction*) $f : E \to F$ associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément de F noté $f(x)$.

1.2. Fonctions

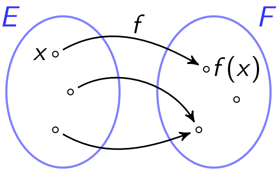
Une *application* (ou une *fonction*) $f : E \to F$ associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément de F noté $f(x)$.

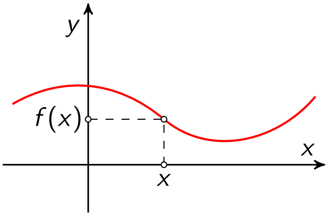




1.2. Fonctions

Une *application* (ou une *fonction*) $f : E \to F$ associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément de F noté $f(x)$.

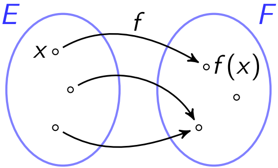


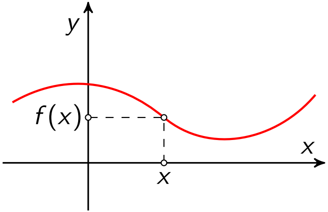


- **Égalité :** Deux applications $f, g : E \to F$ sont *égales* si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On écrit alors $f = g$.

1.2. Fonctions

Une *application* (ou une *fonction*) $f : E \to F$ associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément de F noté $f(x)$.





- **Égalité :** Deux applications $f, g : E \to F$ sont *égales* si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On écrit alors $f = g$.

- **Composition :** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Soient E, F deux ensembles.

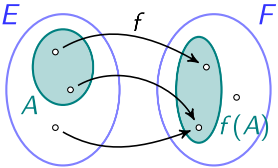
- Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'*image directe* de A par f est l'ensemble

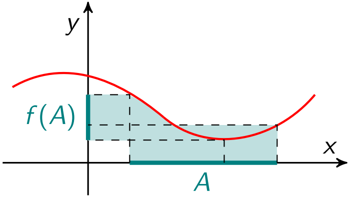
$$f(A) = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\}$$

Soient E, F deux ensembles.

- Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'*image directe* de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

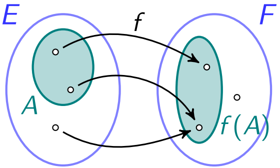


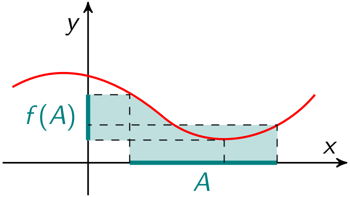


Soient E, F deux ensembles.

- Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'*image directe* de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$





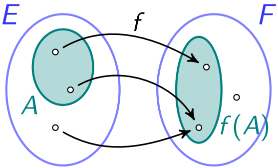
- Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$. L'*image réciproque* de B par f est

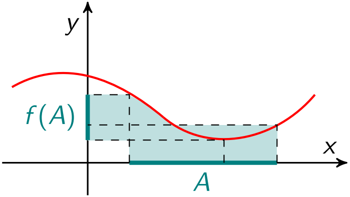
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Soient E, F deux ensembles.

▷ Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'*image directe* de A par f est l'ensemble

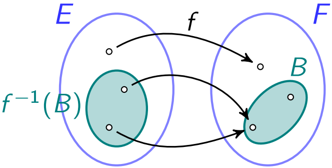
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

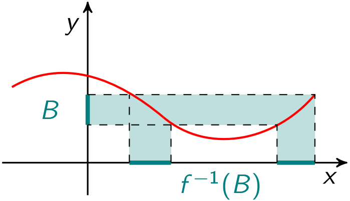




▷ Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$. L'*image réciproque* de B par f est

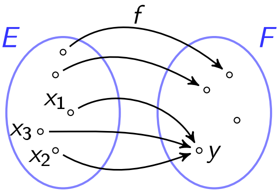
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

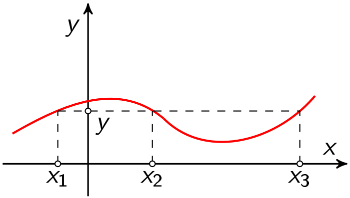




▷ Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y.
L'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

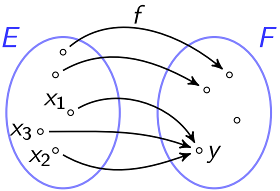
- Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y.
  L'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

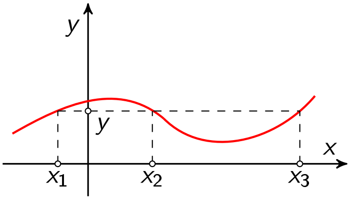




Dans ces deux cas, y admet 3 antécédents : $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

▹ Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y.
L'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.





Dans ces deux cas, y admet 3 antécédents : $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

▹ L'*application identité* de E est l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie par

$$\mathrm{id}_E(x) = x \quad \forall x \in E$$

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

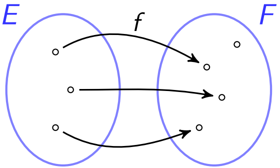
- f est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent :

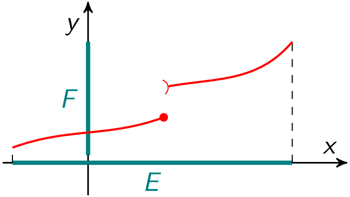
$$\forall x, x' \in E \ \ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$$

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- f est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent :

$$\forall x, x' \in E \ \ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$$

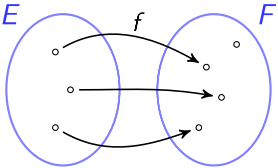


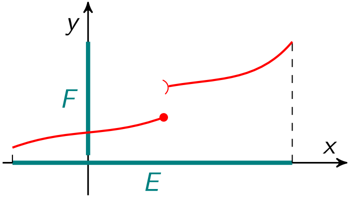


Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- f est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent :

$$\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$$





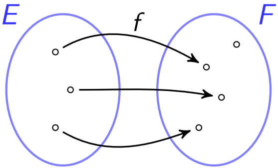
- f est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent :

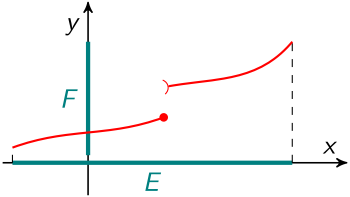
$$\forall y \in F \;\; \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- f est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent :

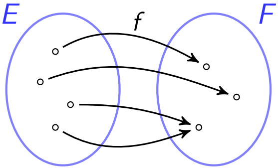
$$\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$$

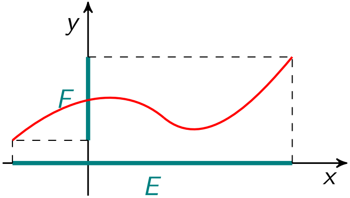




- f est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$



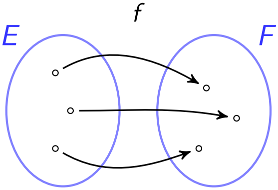


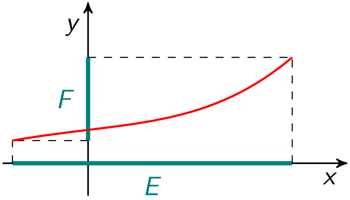
- f est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F \ \ \exists! x \in E \ \ \big(y = f(x)\big)$$

▷ f est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

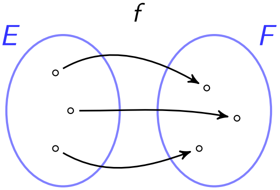
$$\forall y \in F \ \ \exists! x \in E \ \ \big(y = f(x)\big)$$

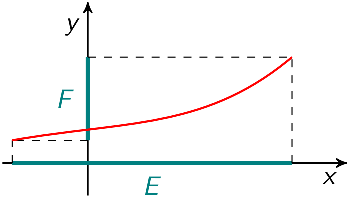




- f est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F \;\; \exists! x \in E \;\; \big(y = f(x)\big)$$



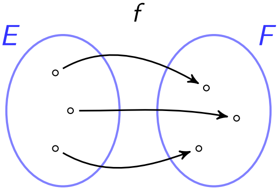


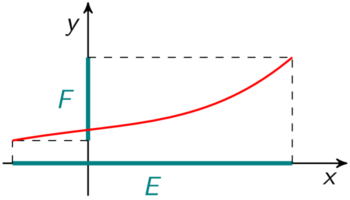
Proposition : Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application

1. f est bijective ssi $\exists\ g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$
2. Si f est bijective, alors g est unique et bijective. On l'appelle la *(bijection) réciproque* de f et on la note f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

- f est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F \;\; \exists! x \in E \;\; \big(y = f(x)\big)$$





Proposition : Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application

1. f est bijective ssi $\exists\ g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$
2. Si f est bijective, alors g est unique et bijective. On l'appelle la *(bijection) réciproque* de f et on la note f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3. Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cet entier n est unique, et s'appelle le *cardinal* de E. On le note $\operatorname{Card} E$.

1.3. Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cet entier n est unique, et s'appelle le *cardinal* de E. On le note $\operatorname{Card} E$.

Si A et B sont finis, alors $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$

1.3. Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cet entier n est unique, et s'appelle le *cardinal* de E. On le note $\operatorname{Card} E$.

Si A et B sont finis, alors $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$

Proposition : Soient E, F ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

1. Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$.
2. Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geq \operatorname{Card} F$.
3. Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

1.3. Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cet entier n est unique, et s'appelle le *cardinal* de E. On le note $\operatorname{Card} E$.

Si A et B sont finis, alors $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$

Proposition : Soient E, F ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

1. Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$.
2. Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geq \operatorname{Card} F$.
3. Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Proposition : Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$.
Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective;
2. f est surjective;
3. f est bijective.