IUT d'Orléans - Département d'Informatique
TD de Probabilités

Fiche 5, Corrections
Variables Aléatoires Continues
(semaine du 09 au 14 Octobre 2006)

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ sur $[0,1]$, $f(x) = 2 - x$ sur $[1,2]$ et nulle partout ailleurs.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité **(voir définition 4.1.1)**,
2. Calculer $P(X \leq 1/2) = 1/8$, $P(1/2 < X \leq 3/2) = 3/4$,
3. Calculer l'espérance et la variance de X, $E(X) = 1, Var(X) = 1/6$.

Exercice 2 Soit $X \sim N(0,1)$.

1. Quelle est la probabilité que X prenne la valeur 1 ?
2. En utilisant la table de la loi normale $N(0,1)$, calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 0,85) = 0,802$, $P(X > -0,84) = 0,8$, $P(-0,7 < X < 2,4) = 0,75$, $P(-X > 1,5) = 0,067$, $P(0,51 < X \leq 0,63) = 0,041$.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(|X| > a) = 0,73$, $P(|X| < b) = 0.75$ et $P(X < c) = 0,8$. $a = 0,345; b = 1,15; c = 0,85$.

Exercice 3 Soit $X \sim N(3,2)$. Calculer les probabilités suivantes : $P(X > 3) = 0,5$; $P(X > -1) = 0,977$; $P(|X - 2| < 1) = 0,341$.

Exercice 4 Grâce aux courbes de croissance dans les carnets de santé, on estime que la moitié des filles de 16 ans mesurent plus de 161 cm, et que trois quart mesurent moins de 165 cm. On suppose que la taille peut être modélisée par une variable aléatoire gaussienne de loi $N(\mu, \sigma)$.

1. Quelle valeur doit-on prendre pour μ ? $\mu = 161$
2. Quelle valeur doit-on prendre pour σ^2 ? $\sigma^2 = 35,64$
3. Quelle est la proportion de filles de 16 ans mesurant plus de 170 cm ? $0,067$

Exercice 5 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables normales $N(\mu, \sigma)$ indépendantes. On définit

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1}$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{2}$$

1. Montrer que $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$.

2. On suppose que $\sigma = 1$. Trouver n tel que

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq 0.01) \geq 99\%.$$

$n \geq 66357$

Exercice 6 On définit pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $\sigma > 0$,

$$f_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Soit $Z \sim N(0,1)$ et $X \triangleq \sigma Z + \mu$. Exprimer $P(X \in [a,b[)$ en fonction de $f_{0,1}$. $P(X \in [a,b[) = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} f_{0,1}$.