IUT d'Orléans - Département d'Informatique
TD de Probabilités

Fiche 4 Corrections
Variables Aléatoires Discrètes
(semaines du 25 au 30 septembre et du 02 au 06 octobre 2006)

Exercice 1 Montrer que si

1. X suit une loi binomiale $B(n,p)$ alors, $E(X) = p*n$ et $Var(X) = (1-p)*p*n$,
2. X suit une loi de Poisson $P(\lambda)$ alors, $E(X) = Var(X) = \lambda$,
3. X suit une loi Géométrique $G(p)$ alors, $E(X) = 1/p$, et $Var(X) = (1-p)/p^2$.

Exercice 2 On suppose qu'un patient admis à un hôpital a 7 chances sur 100 de contracter une infection nosocomiale. On considère un service de 20 lits. En supposant que les cas sont indépendants, calculer la probabilité d'observer dans ce service au plus 3 patients avec une infection nosocomiale ? **Soient X le nombre de personnes atteintes par la maladie et $p = 7/100$, $X \sim B(p, 20)$, $P(X \leq 3) = (1-p)^{20} + C_{20}^1 p(1-p)^{19} + C_{20}^2 p^2(1-p)^{18} + C_{20}^3 p^3(1-p)^{17}$**
Quel est le nombre moyen de patients atteints par l'infection ? **1,4**

Exercice 3 Une urne contient 4 boules numérotées 0,1,1 et 2. On effectue n tirages avec remise (c'est à dire qu'après chaque tirage la boule tirée est remise dans l'urne). On note X_i le numéro de la ième boule extraite.

1. Calculer la loi de X_i pour $i = 1, \cdots, n$. $P(X_i = 0) = P(X_i = 2) = 1/4$, $P(X_i = 1) = 1/2$.
2. On pose $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, calculer $E(Y_n)$ et $Var(Y_n)$. $E(Y_n) = n$ et $Var(Y_n) = n/2$.

Exercice 4 Soient X, Y et Z, 3 variables aléatoires telles que $X \sim B(p)$, $Y = 2X - 1$ et $Z = 2X + 1$,

1. Calculer $E(-2X + Y + Z)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ et $Var(Z)$. $E(-2X + Y + Z) = 4p + 1$, $Var(X) = p(1-p)$, $Var(Y) = 4p(1-p)$ et $Var(Z) = 4p(1-p)$.
2. Calculer $Cov(X, Y)$, $Cov(X, Z)$ et $Cov(Y, Z)$. X, Y et Z sont-elles indépendantes ? $Cov(X, Y) = 2p(1-p)$, $Cov(X, Z) = 2p(1-p)$ et $Cov(Y, Z) = 4p(1-p)$. Non il n'y a pas indépendance.
3. Calculer $Var(X + Y)$ (On utilisera que $Var(X + Y) = VarX + VarY + 2Cov(X, Y)$). $Var(X + Y) = 9p(1-p)$.
4. Donner la loi de $X + Y$ et retrouver la valeur de $Var(X + Y)$. $P(X + Y = -1) = 1 - p$, $P(X + Y = 2) = p$.

Exercice 5 Un joueur lance n fois un dé équilibré. A chaque lancé, il gagne la valeur du numéro obtenu si celui-ci est pair, et il la perd si le numéro est impair.

1. Soit X_k le nombre de fois où le numéro k est obtenu ($1 \leq k \leq 6$). Quelle est la loi de X_k ? $P(X_k = j) = C_n^j \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}$ pour tous $0 \leq j \leq n$.
2. On note G le gain du joueur. Exprimer G en fonction des X_i et calculer $E(G)$. $G = -X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 4X_4 - 5X_5 + 6X_6$, $E(G) = n/2$.

Exercice 6 On modélise le nombre de champignons ramassés par une variable de Poisson N de paramètre λ.

1. Quelle est la probabilité d'avoir ramassé au moins 3 champignons ? $P(N \geq 3) = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2!)$

Chaque champignon, indépendamment des autres, a la probabilité p d'être vénéneux et $(1 - p)$ d'être comestible.

1. Quelle est la probabilité d'avoir ramassé au moins un champignon vénéneux ? $1 - e^{-\lambda p}$
2. Quel est le nombre moyen de champignons vénéneux ? λp

Exercice 7 Une pièce de monnaie est telle que pile sort avec probabilité p. Cette pièce est lancée N fois où N est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Appelons X le nombre de "pile" obtenu, et Y le nombre de "face" obtenu. Calculer $E(X)$, $E(X) = \lambda p$. Calculer la fonction génératrice G_X de X, $\forall z,\ G_X(z) = e^{\lambda p(z-1)}$. Déduire $Var(X)$ de G_X [1], $Var(X) = \lambda p$. Quelle est la loi de X ? $X \sim P(\lambda p)$.

[1] On rappelle que si G_X est la fonction génératrice de X, alors $G'_X(1) = E(X)$ et $G''_X(1) = E(X^2) - E(X)$