

## Options, Futures, Parité call put

**Exercice 1** Quelle est la différence entre (a) prendre une position longue sur un forward avec un prix forward de 50\$ et (b) acheter un call de prix d'exercice 50\$. Supposons qu'à l'échéance  $S_T = 35\$$  et que le premium est à 5\$, calculer les profits de chacune des stratégies.

**Exercice 2** Tracer le graphe du profit et du payoff de l'achat puis de la vente d'un put européen. Quelle est la perte potentielle maximale engendrée par la vente d'un put ? par l'achat d'un put ?

**Exercice 3** Donner les 4 positions de bases que l'on peut obtenir avec un call et un put.

**Exercice 4** Expliquer la différence entre une vente d'un call et un achat de put.

**Exercice 5** Un trader prend une position courte sur un forward de 100 millions de yens . Le taux de change forward est de 0.008 \$ par yen. Combien gagne ou perd le trader si le taux de change à la fin du contrat est de (a) 0.0074 \$ ou (b) 0.0091 par yen ?

**Exercice 6** Vous souhaitez spéculer sur la hausse d'une certaine action. Son prix est aujourd'hui de 29 \$ et un call à trois mois de prix d'exercice 30 \$ cote aujourd'hui 2,9 \$. Vous avez 5800 \$ à investir. Définissez deux stratégies conformes à vos anticipations, la première sur l'action, la seconde sur l'option. Quels sont vos gains (pertes) potentiels sur chacune des deux stratégies ?

**Exercice 7** Un put, échéance juin et prix d'exercice 60\$, cote 4\$. Dans quelles circonstances le vendeur de cette option fera-t-il un profit à l'échéance et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits du vendeur du put à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

**Exercice 8** Le 1er Juillet 2004, une entreprise prend une position longue sur un forward pour acheter 10 millions de livres sterling le 1er Janvier 2005. Le 1er septembre 2004, elle prend une position courte sur le même contrat. Décrivez les payoffs de cette stratégie.

**Exercice 9** Quelle est la borne inférieure du prix d'un call à 4 mois portant sur une action ne versant pas de dividende et dont le cours est de 28, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 25 et le taux d'intérêt sans risque de 8% par an.

**Exercice 10** Vous avez en portefeuille 5000 actions cotant 25 euros chacune. Comment l'achat de put peut-il vous procurer une assurance contre la baisse des cours dans les 4 mois qui viennent.

**Exercice 11** Un trader achète un put européen sur action pour 3 euros. Le prix de l'action est de 42 euros et le prix d'exercice 40 euros. Dans quelles circonstances le trader fera-t-il un profit, et dans quels cas l'option sera-t-elle exercé. Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

**Exercice 12** Quelle est la borne inférieure du prix d'un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est de 12, sachant que le prix d'exercice de l'option de 15 et le taux d'intérêt sans risque de 6% par an.

**Exercice 13** Un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividende est actuellement coté 2.5. L'action est cotée 47, le prix d'exercice est de 50 et le taux d'intérêt sans risque de 6% par an. Quelles sont les opportunités dont pourrait profiter un arbitragiste ?

**Exercice 14** Un call européen à 4 mois portant sur une action versant un dividende est actuellement coté 5. L'action est cotée 64, le prix d'exercice est de 60 et un dividende de 0.8 sera versé dans 1 mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 12% par an quelle que soit l'échéance. Quelles sont les opportunités dont pourrait profiter un arbitragiste ?

**Exercice 15** On se place dans le modèle binomiale à une période. Déterminer le prix d'une option d'achat européenne et son portefeuille de couverture, lorsque  $S_0 = 120$ ,  $K = 80$ ,  $r = 1\%$ ,  $S^+ = 160$ ,  $S^- = 60$ . En déduire le prix du put avec les mêmes caractéristiques.

### Quelques stratégies d'échanges impliquant des options

**Exercice 16 Le bull spread** (ou spread haussier) est constitué de l'achat d'un call (dont le prix est noté  $C_1$ ) à un prix d'exercice donné  $K_1$  et de la vente d'un call (dont le prix est noté  $C_2$ ) à un prix d'exercice supérieur  $K_2$ , les deux portant sur le même sous-jacent. Les deux options ont aussi la même date d'échéance. On suppose de plus que  $C_1 = 3 * C_2$ .

1. Tracer le profit d'une telle stratégie : faire apparaître sur un graphique les profits de l'achat du call de prix  $C_1$ , de l'achat du put de prix  $C_2$  et des deux réunis.
2. Donner, en fonction de  $S_N$  (la valeur du sous-jacent à l'échéance), les valeurs du payoff d'un bull spread. Ce payoff peut-il être négatif ?
3. Un exemple numérique : un investisseur achète pour 3\$ un call de prix d'exercice 30\$ et vend pour 1\$ un call de prix d'exercice 35\$. Quel est son revenu à l'échéance ?
4. Donner un scénario pour lequel il est intéressant de se positionner sur un bull spread.
5. Peut-on obtenir un bull spread en utilisant des options de vente ? Si oui comment ?

**Exercice 17 Le straddle** consiste en l'achat d'un call (dont le prix est noté  $C_1$ ) et d'un put (dont le prix est noté  $P_1$ ) sur le même sous-jacent à un prix d'exercice identique  $K$  et de même date d'échéance. 1. Tracer le profit d'une telle stratégie : faire apparaître sur un graphique les profits de l'achat du call de prix  $C_1$ , de la vente du call de prix  $P_1$  et des deux réunis.

2. Donner, en fonction de  $S_N$  (la valeur du sous-jacent à l'échéance), les valeurs du payoff d'un straddle. Ce payoff peut-il être négatif ?
4. Donner un scénario pour lequel il est intéressant de se positionner sur straddle.
3. Un exemple numérique : supposons que la valeur d'une action cote 69, on réalise un straddle en achetant à la fois un call et un put d'échéance 3 mois de strike 70, de plus  $C_1 = 4$  et  $P_1 = 3$ . Donner les gains ou pertes potentiels en fonction de la valeur de l'action dans 3 mois.

**Exercice 18 Le calendar spread** peut être réalisé en vendant un call de prix d'exercice donné et en achetant un call de même prix d'exercice mais dont la date d'échéance est plus éloignée. On sait que plus la durée de vie d'une option est longue plus son prix est élevé, par conséquent un calendar spread nécessite un investissement initial.

Les diagrammes de payoffs d'un calendar spread sont le plus souvent présentés de façon à traduire les payoffs à la première échéance, en supposant que l'option à échéance longue est revendue à cette date.

1. Donner une explication (économique) à l'affirmation : "le prix d'un call augmente lorsque le prix de son sous-jacent s'apprécie".
2. Représenter graphiquement le profil du gain d'un calendar spread.
3. Donner un scénario pour lequel il est intéressant de se positionner sur un calendar spread.

**Exercice 19 Stratégie d'échange impliquant des options sur actions.**

On notera  $(C, K, T)$  les trois caractéristiques d'une option, sa prime  $C$ , son strike  $K$ , et son échéance  $T$ .

Un **butterfly spreads** implique des options de trois prix d'exercice différents et de même échéance  $T$ . Il peut être créé en achetant un call  $(C_1, K_1, T)$ , un deuxième call  $(C_3, K_3, T)$  et en vendant 2 call  $(C_2, K_2, T)$ . Cette stratégie a pour condition  $K_1 < K_2 < K_3$ ,

Questions :

5) Classer les 3 premiums par ordre croissant, justifier votre choix.

On suppose dans la suite que le prix de l'option la moins chère est égale à la valeur  $a$ , que la plus chère vaut  $3 * a$  et celle de prix intermédiaire  $1,5 * a$ .

6) Sur un même graphique, tracer les profits de l'achat des deux call 1 et 3, de la vente des deux call (réunis) de même caractéristique et de la stratégie dans son ensemble.

7) Faites le tableau des payoff des différentes options et de la stratégie.

8) Quand est-ce que cette stratégie est profitable ?

9) Quelle est la perte maximale de la stratégie ?

Un exemple numérique : un investisseur décide de créer un butterfly spread en prenant  $K_1 = 55$ ,  $K_2 = 65$  et  $K_3 = 60$ , on suppose également que  $a = 2$ .

10) Quelle est le coût de la stratégie ?

11) Mon gain est de 1 (euro) combien vaut  $S_T$  ?

12) On suppose que  $S_0 = 61$ . Peut-on déterminer s'il existe une opportunité d'arbitrage pour le call de premium  $C_2$  ? Justifier votre réponse.

**Propriétés des Call et Put sur action**

Soit  $X$  une entreprise cotée en bourse, dont l'action de valeur  $S_t$  à l'instant  $t$ , versera deux dividendes aux dates  $T_1$  et  $T_2$  dont les valeurs à ces dates sont respectivement  $D_1$  et  $D_2$ . Soit un call de premium  $C$  d'échéance  $T > T_2$  et de strike  $K$ . Soit également  $r$  le taux d'intérêt annuel continu sans risque.

13) Donner l'expression des valeurs actualisées (à  $t=0$ ) des deux dividendes.

14) Montrer qu'il existe une borne inférieure pour le call.

L'entreprise enregistre une forte baisse de bénéfice avant la date  $T_1$  et son conseil d'administration décide de ne plus verser de dividende.

15) Quelle est l'effet de cette annonce sur le cours de l'action ? sur le cours du call ? justifier brièvement.

16) Montrer la parité Call-Put pour des options ne versant pas de dividende. Quelle est la condition nécessaire pour que l'on puisse écrire cette égalité ?

**Exercice 20** Construisez un graphique présentant les variations des gains et pertes d'un investisseur en fonction de la valeur de l'action à l'échéance pour des portefeuilles suivants :

1) Une action et une position courte sur un call.

2) Deux actions et une position courte sur un call.

3) Une action et une position courte sur deux calls.

Un investisseur pense que le cours d'une action va connaître une forte et brutal variation, mais il ne sait pas si elle sera positive ou négative.

4) Identifiez 4 stratégies différentes que l'investisseur peut suivre pour en profiter et expliquez leur différence.

5) Un strip consiste en une position longue sur un call et sur deux put de même prix d'exercice et même date d'échéance. Construisez un graphique du profit de cette stratégie.

6) Un strap consiste en une position longue sur deux call et sur un put de même prix d'exercice et même date d'échéance. Construisez un graphique du profit de cette stratégie.

7) Ces deux stratégies peuvent-elles s'ajouter aux 4 stratégies de la question 4 (justifier) ?

8) Le strip est-il plus intéressant que le strap si le cours est orienté à la baisse (justifier) ?

9) Montrer la parité call/put puis rappeler le principe d'un butterfly spread. Utiliser la parité

call/put pour montrer que le coût d'un butterfly spread créé à l'aide de puts européens est identique à celui qui est créé à l'aide de call européens.

## Quelques options exotiques

### Exercice 21 Options digitales

On appelle **option digitale de type européenne** une option qui, en cas d'exercice, donne droit à un rendement fixe et préétabli si le sous-jacent satisfait à une condition prédéterminée, sinon elle ne donne droit à aucun rendement. On note  $S$  la valeur du sous-jacent,  $T$  la date d'échéance,  $C$  la prime de l'option et  $K$  le strike.

Exemples : L'option digitale **cash-or-nothing**, n'engendre aucun payoff quand  $S_T < K$  et donne droit au flux (positif)  $Q$  si  $S_T \geq K$ . L'option digitale **asset-or-nothing** ne délivre aucun flux si le prix de l'actif sous-jacent termine sous le prix d'exercice, il délivre un montant égal au prix de l'actif sous-jacent si celui-ci est supérieur au prix d'exercice à l'échéance.

- 1) Donner le payoff et représenter graphiquement le profit de l'achat et de la vente de l'option digitale **cash-or-nothing**. Le prix de cette option est-il supérieur ou inférieur à une option d'achat vanille de strike  $K$  et même date d'échéance ? Justifier votre réponse.
- 2) On considère trois options **cash-or-nothing** ayant pour caractéristiques  $C_1, C_2, C_3$  telles que  $K_1 > K_2 > K_3$ ,  $Q_1 = Q_2 = Q_3$  et même date d'échéance  $T$ , quel est le profit maximal pour chacune de ces options ? Quelle est celle qui vous offre le gain le plus probable, le gain le plus important ? Justifier vos réponses.
- 3) Discuter de l'intérêt de l'option **cash-or-nothing** de prime  $C_1$  avec  $Q_1 = S_0/3$ , par rapport à l'option **asset-or-nothing** de prime  $C_4$  avec  $K_1 < K_4$  en fonction de l'orientation du marché.
- 4) Mettez en place une stratégie vous permettant de réaliser un gain, en utilisant uniquement une option digitale et une option vanille. Pour cela vous vous placerez dans ce cas de figure : à l'échéance j'exclu que  $S_T$  soit compris entre deux valeurs  $K_1$  et  $K_2$ , je parie sur une éventuelle baisse modérée ou une appréciation importante de  $S_T$ . Faites un graphe de la stratégie.
- 5) Peut-on fabriquer un call vanille à partir d'options digitales ? Si oui comment ?
- 6) Montrer une borne inférieure (fonction de  $K$ ,  $S_0$  et  $r$  le taux sans risque) impliquant des options digitales.

### Exercice 22 As you like it / Knock-out, knock-in

Les options au choix (chooser options), aussi appelée option "as you like it" d'échéance  $N$  et strike  $K$  donne le droit à son détenteur de choisir à une date  $N_1 < N$ , si cette option est un call ou un put.

- 1) Quelle est la valeur de cette option à la date  $N_1$  ?
- 2) Si l'on suppose que cette option est de type européenne, utiliser un résultat de la partie I, pour montrer que l'on peut écrire le prix de cette option en fonction uniquement de  $c$ , des caractéristiques de cette option et du taux sans risque.
- 3) En déduire la constitution d'un portefeuille (constitué à la date 0) qui offre les mêmes caractéristiques que cette option.
- 4) Tracer l'allure du graphe du profit de l'achat d'une option chooser (achetée à la date 0) à la date  $N_1$ .
- 5) Refaire les questions 6 et 7 en supposant que le sous-jacent paie un flux intermédiaire au taux  $q^1$ .

• Les options Knock-out et Knock-in, ont leur payoff qui dépend du passage éventuel d'un seuil (déterminé initialement) par le prix de l'actif sous-jacent.

Une knock-out est équivalente à un call si le sous-jacent à l'échéance est en dessous du seuil (noté  $s^-$ ), et cesse d'exister au-delà.

Inversement, une knock-in est équivalente à un call si le sous-jacent à l'échéance est au dessus d'un

---

1. C'est à dire que la détention d'un actif de valeur  $H$  à la date 0 produit un dividende de valeur  $He^{qT} - H$  à la date  $T$ .

certain seuil (noté  $s^+$ ).

6) Les knock-out ou knock-in, sont-ils plus chères ou moins chères qu'un call? Montrer que dans le cas contraire il existe une opportunité d'arbitrage (O.A).

7) Donner les payoff et tracer le profit de l'acheteur de knock in et du knock out, tracer sur le même graphe le profit de l'achat du call.

8) Avec quelles options, que vous connaissez déjà, pouvez-vous synthétiser un knock-in?

9) Quand est-ce qu'il est intéressant d'investir dans une knock-in, quelle est son intérêt par rapport à un call.

## Les swap

### Exercice 23 Swaps / Swaptions européennes

#### A) Swap sur taux d'intérêt

1) Rappeler le principe général et l'utilité d'un swap sur taux.

Les entreprises A et B se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variables sur  $N=20M$  d'euros.

	Taux Fixe	Taux Variable
A	4%	Euribor+10
B	4,7%	Euribor+30

L'entreprise A cherche à emprunter à taux variable et B à taux fixe.

2) Construisez un swap avec un intermédiaire qui gagnera 10 points de base, de façon à ce que le swap soit aussi attractif pour A que pour B.

#### B) Swaptions européennes

On rappelle que les options de swap ou swaptions sont des options sur des swap de taux. Elles donnent le droit à leur détenteur de conclure un swap à une date futur déterminée  $T$ . On distingue deux catégories de swaptions : les «receiver swaptions» (droit de recevoir le taux fixe) et les «payer swaptions» (droit de payer le taux fixe).

3) Une entreprise A, ayant emprunter à taux variable LIBOR+30 sur 6 ans souhaite se protéger d'un éventuel hausse du LIBOR. Dans quel type de produit peut-elle investir? Décrivez le processus.

4) Montrer une relation de parité call put pour swaption européennes.

On se place dans le cas du payer swaptions, le payoff "naïf" d'une swaption (celui que nous avons vu en cours) consiste à regarder uniquement le flux à la date d'échéance  $T$ . Si  $N$  est le nominal et  $r$  le taux sans risque du swap, ce payoff vaut  $N(\text{LIBOR}_T - r)^+$ . En fait si l'on considère que  $T = 1$  an, que le SWAP porte sur 5 ans et qu'il s'agit du LIBOR 1 an, plusieurs flux vont apparaître.

5) Quels sont ces flux? En déduire le payoff à la date  $T$  d'une swaption ayant les caractéristiques précitées.