

Mathématiques pour la finance

Définition, Evaluation et Couverture des Options vanilles

Version 2012

Pierre Andreoletti
pierre.andreoletti@univ-orleans.fr
Bureau E15

Objectifs du cours

- Définition et utilité des actifs dérivés, étude du cas particulier des forward et des options, propriétés et stratégies financières impliquant des options sur actions.
- Description et utilisation des SWAP de taux et SWAP sur devises.
- Etablir le lien entre certaines propriétés des marchés telles que l'arbitrage et la complétude et les outils mathématiques tels que les martingales et l'existence d'une probabilité risque neutre.
- Détermination rationnelle du juste prix d'une option (option pricing), c'est à dire de son prix de marché et de la manière de la couvrir (hedging).

Plan du cours

- Finance de marché et actifs dérivés
- Propriétés des options sur actions
- Les SWAPs
- Couverture des options européennes

Ressources / Références

- **Sites à visiter**

<http://www.euronext.com/>

<http://www.londonstockexchange.com/>

<http://www.nyse.com/>

- **Quelques ressources pédagogiques**

<http://www.math.jussieu.fr/~emam/finance.html>

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~elkaroui/index.html>

<http://www.maths-fi.com/mathematiques-finance.asp>

<http://www.bachelier-paris.com/>

- **Livres**

"Options, futures et autres actifs dérivés", John Hull

"Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", Lamberton

Lampeyre

"Financial calculus", Baxter Rénie

- **Offres de stages et d'emplois** <http://www.maths-fi.com/>

<http://www.efinancialcareers.fr/>

Historique/Motivation

- Début des années 70 (pour les Etats Unis, 1984 pour la France) déréglementation des marchés financiers. **Intérêts** : dynamiser les économies, le développement et l'innovation en facilitant et diversifiant l'accès à des financements.
- Conséquences : volatilité des taux d'intérêt, instabilité des taux de change. Les entreprises industrielles et commerciales sont soumises à des risques accrus.

Exemple 1 : *Une société européenne tient sa comptabilité en euros et signe un contrat en dollars, payable à la livraison. Entre aujourd'hui et la livraison le taux de change euro/dollar va fluctuer, l'entreprise est donc soumise à un risque de change.*

Exemple 2 : *Un investisseur souhaite prendre une participation dans une entreprise qu'il estime à fort potentiel, mais très risquée. Il désire détenir d'abord de la dette rémunérée à un taux fixe (obligation), convertible en actions en cas de croissance de l'entreprise.*

Réponses apportées

- Trouver des outils afin de couvrir ces risques.
- Emergence de nouveaux marchés organisés afin de permettre aux intervenants (Banques, Assurances, Sociétés de bourse . . .) d'échanger massivement des produits d'assurance.
- Apparition de nouveaux instruments financiers dits produits ou actifs dérivés.

Définitions d'un actif dérivé

- **Actif (asset)** tout ce qui peut être acheté ou échangé sur un marché financier.
Exemple : actions, obligations, taux d'intérêt, taux de change, électricité, options, CAT ...
- **Actif dérivé (derivatives)** ou produit dérivé est un actif dont la valeur dépend d'autres variables plus fondamentales comme : les prix d'autres actifs négociés sur les marchés, les taux d'intérêts, les taux de change, les matières premières, les indices boursiers ...
- Exemples de produits dérivés : futures, forward, options, swap, CDS, CDO ...

Un actif est aussi appelé sous-jacent (underlying asset).

Lieu de négociation des actifs dérivés

- **Les marchés organisés** : Un marché organisé est un marché sur lequel sont échangés des contrats standardisés, élaborés par les autorités de marché (AMF pour la France).

Exemples : Chicago Board of Trade (1848), NYSE Euronext, basés dans 6 pays, incluent le New York Stock Exchange, le plus grand marché d'actions au monde ; Euronext, le plus grand marché d'actions de la zone Euro ; Liffe (London International Financial Futures and Options Exchange), le premier marché dérivés en Europe en valeur des échanges ; et NYSE Arca Options, l'une des plateformes de négociation d'options enregistrant la plus forte croissance aux Etats-Unis. London Stock Exchange (marché actions UK). Eurex (Allemagne-Suisse).

- **Les marchés de gré à gré (OTC, Over The Counter)**, ils sont une alternative importante en terme de volume de transactions. Les échanges sont conclus par téléphone ou par l'intermédiaire de réseaux informatiques entre deux institutions financières ou entre une institution et son client. Ces institutions cotent des prix auxquels elles sont prêtes à acheter (prix demandé ou *ask*) et des prix auxquels elles acceptent de vendre (prix offert ou *bid*).

L'avantage du marché OTC est la possibilité de traiter des produits sur mesure, la contrepartie étant qu'une des deux parties puisse faire défaut. Les conversations téléphoniques sont enregistrées pour régler les litiges éventuels.

Les banques d'investissement, par exemple, ont des salles de marché où sont échangés ces produits non standardisés.

Exemples d'actifs dérivés

1. Les contrats forward et future

Les contrats *forward* et les contrats *future* sont des engagements fermes à acheter ou à vendre un actif à une date future donnée pour un prix convenu. Ils se distinguent d'un contrat *spot* dans lequel la transaction est réalisée immédiatement.

La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite *longue* alors que celle qui s'engage à vendre prend une position dite *courte*.

Les contrats forward et future peuvent être utilisés, par exemple, pour couvrir le risque de change.

Exemple 1 : Supposons que le trésorier d'une entreprise américaine sache que, dans six mois, il devra s'acquitter un million d'euros et qu'il souhaite se protéger contre les variations du taux de change. Il peut s'engager dans un contrat forward et acheter de l'euro dans six mois à un taux fixé aujourd'hui par le contrat. L'entreprise prend alors une position longue sur un forward à 6 mois.

Les forward sont échangés sur les marchés OTC, les futures sur les marchés organisés.

1.1. Les flux d'un contrat forward

Tableau 1 :Taux de change spot et forward EUR-USD

	Bid (offert)	Ask (demandé)
Spot	1.1531	1.1535
Forward 1 mois	1.1520	1.1525
Forward 3 mois	1.1498	1.1503
Forward 6 mois	1.1465	1.1471
Forward 1 ans	1.1399	1.1405

Si on considère la transaction précédente (Exemple 1) qui oblige l'entreprise à acheter 1M EUR dans 6 mois pour 1.1471M USD. Si dans 6 mois le taux est de 1.16, la valeur du contrat forward sera de 12900 USD=1.16M USD - 1.1471M USD, si il est à 1.14 sa valeur sera -7100USD. D'une manière générale le *flux* ou *payoff* engendré par une position longue sur un forward s'écrit :

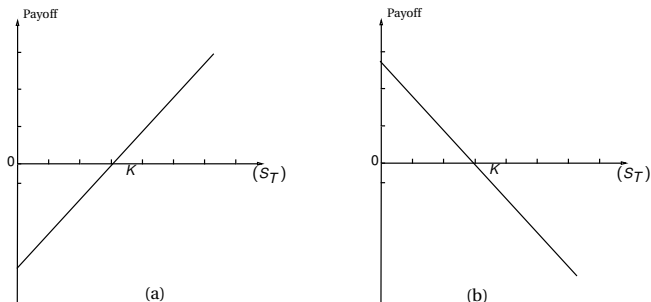
$$S_T - K$$

K est le prix de livraison de l'actif sous-jacent, S_T le prix spot de cet actif à la date T échéance du contrat. Question : quelle hypothèse est favorable à l'entreprise ? au vendeur du contrat ?

De la même façon, le payoff d'une position courte sur un forward s'écrit

$$K - S_T.$$

On peut représenter graphiquement les payoff d'un contrat forward de la façon suivante :



Payoffs d'un contrat forward : (a) position longue, (b) position courte. Prix de livraison K , prix de l'actif à l'échéance du contrat S_T .

1.2 Prix forward et prix spot

Les prix forward et prix spot sont liés, nous le montrons sur un exemple en considérant l'exemple d'un contrat sur de l'or. Pour simplifier on suppose qu'il n'y a pas de coût de stockage et que l'or n'engendre pas de revenus intermédiaires. Supposons que le prix spot de l'or soit de 300USD l'once et que le taux sans risque à un an soit 5%. Quel peut être le prix forward d'une once d'or à un an ? Envisageons d'abord un prix forward de 340USD. Un trader peut alors adopter la stratégie suivante :

1. Emprunter 300USD au taux de 5% pour un an.
2. Acheter une once d'or.
3. Prendre une position courte sur le forward.

Dans un an ce trader rembourse son emprunt avec les intérêts, soit 315USD, il livre l'once d'or et reçoit en échange 340USD par le contrat forward arrivé à échéance. Le profit est de 25USD. Plus généralement, tout prix forward supérieur à 315USD rend la stratégie précédente profitable. Que se passe-t-il si le prix forward est de 300USD ? Un investisseur qui détient de l'or peut alors :

1. Vendre l'or au comptant à 300 USD.
2. Placer les 300 USD au taux sans risque de 5%.
3. Prendre une position longue sur le forward.

Question : que se passe-t-il dans un an ?

1.3 Conclusion et remarque

On remarque que pour tout prix forward supérieur à 315 USD, la première stratégie est profitable, et que pour tout prix forward inférieur à 315, c'est la seconde qui dégage un profit. L'existence d'opérateur cherchant à exploiter de telles opportunités devrait conduire à un prix forward d'exactly 315USD. Tout autre prix relève une ***opportunité d'arbitrage***.

2. Les options vanilles (plain vanilla)

- **Option d'achat européenne** (european call) contrat qui donne à son détenteur (ou acheteur) le droit (mais non l'obligation) d'acheter un actif à une date N au prix K , dit prix d'exercice (strike), fixés à l'avance. Ce contrat a un prix C appelé prime.
- **Option de vente européenne** (european put) contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) de vendre un actif au prix K à une date N fixés à l'avance. Ce contrat a un prix C .
- **Option d'achat (resp. vente) américaine** (american call (resp. put)) contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'acheter (resp. vendre) un actif à n'importe quelle date avant la date N au prix K , dit prix d'exercice (strike), fixés à l'avance. Ce contrat a un prix ou *premium* C .

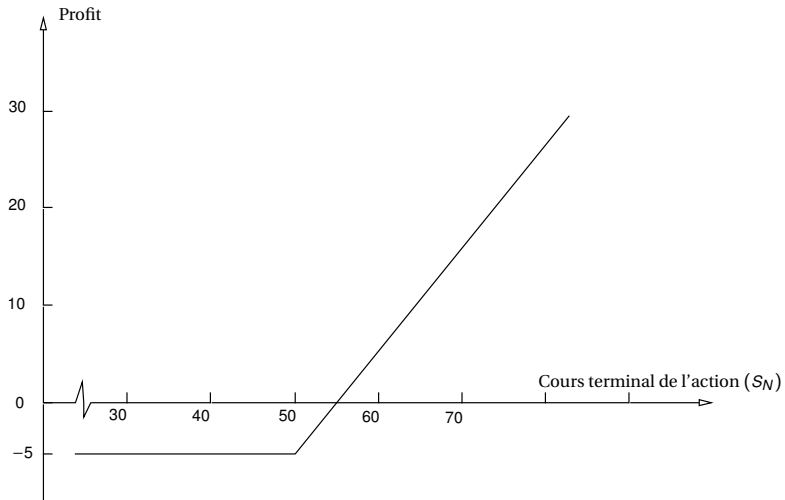
3. Les options exotiques Il existe une multitude d'options, créées par l'ingénierie financière, elles permettent de s'adapter aux besoins spécifiques des investisseurs. Ex : options asiatiques, options barrières, options lookback, options shout ...

Cas du call européen

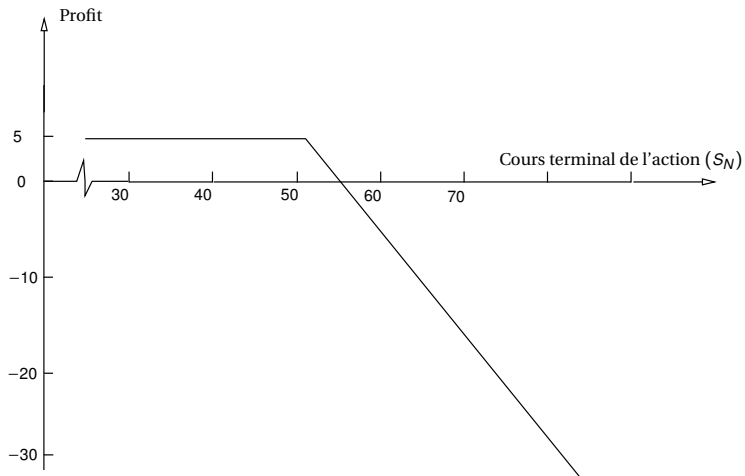
On considère un actif de prix à l'instant n , S_n et un call européen (K, N, C) sur cet actif. On a deux cas de figure à l'échéance

- soit $S_N < K$: le détenteur (ou acheteur) de l'option a le droit d'acheter au prix K un actif qu'il pourrait acheter moins cher sur le marché. Ce droit n'a aucun intérêt, il ne l'exerce donc pas et il ne se passe rien.
- soit $S_N > K$: le détenteur de l'option d'achat peut acheter l'actif moins cher que sur le marché, ce qu'il fait. Le vendeur de l'option doit donc acheter l'actif au prix S_N et la revendre au prix K à l'acheteur. Tout se passe donc comme s'il payait $S_N - K$ au détenteur de l'option d'achat.

En conclusion : au temps $n = 0$ l'acheteur paie C au vendeur de l'option d'achat. Au temps N , il reçoit le maximum de $S_N - K$ et 0 , noté $(S_N - K)^+$. On appelle fonction de paiement (payoff) pour un call européen la fonction $g(S_N) = (S_N - K)^+$.



Profit de l'achat d'un call sur l'action X : $(S_N - K)^+ - C$. Prime $C = 5$, prix d'exercice $K = 50$



Profit de la vente d'un call sur l'action X : $C - (S_N - K)^+$. Prime $C = 5$, prix d'exercice $K = 50$

Problématiques

- Deux problèmes se posent : • Le prix de tels contrats optionnels (prime) •
Quelle attitude adopter lorsque l'on a encaissé la prime et endossé le risque ? i.e : Comment investir la prime de manière à faire face à toute éventualité.
- Black-Sholes-Merton (prix nobel d'économie en 1987) : il faut diversifier le risque sur le temps en mettant en œuvre une stratégie d'investissement dynamique. Existence d'une stratégie dynamique optimale, explicitement calculable, supprimant tous les risques possibles dans tous les scénarios de marché.

Les intervenants sur produits dérivés

Le succès considérable des marchés des options trouve son origine dans la capacité de ces derniers à attirer diverses catégories d'investisseurs. La liquidité, conséquence de ce succès, permet à tout investisseur souhaitant prendre une position en options de trouver une contrepartie. On distingue trois catégories d'intervenants :

Les opérateurs en couverture (hedgers) : ils utilisent les contrats forward, les futures ou options pour réduire leur exposition au risque de variations de la valeur des actifs sous-jacents.

Les speculateurs : contrairement au hedgers, ils utilisent les produits dérivés pour gagner de l'argent en pariant sur le sens de l'évolution du marché.

Les arbitragistes : leur objectif est d'assurer un profit en prenant simultanément position soit sur plusieurs actifs dérivés différents, soit sur un actif dérivé et son sous-jacent. Il s'agit pour eux, de profiter d'éventuelles incohérences temporaires de prix entre différents titres ou contrats.